Seminar zur Vorlesung

Quantenmechanik

Sommersemester 2017

Blatt 13

12.07.2017

Aufgabe 28 *Drehimpulse II*

Beim Wasserstoffatom wurde in der Vorlesung verwendet, dass der Winkelanteil des Laplaceoperators die Eigenwerte $-\ell(\ell + 1)$ hat. Tatsächlich bewiesen wurde aber

$$\hat{L}^2 Y_{\ell m} = \hbar^2 \ell(\ell + 1) Y_{\ell m}.$$

Im Folgenden soll gezeigt werden, dass daraus folgt, dass der Winkelanteil des Laplaceoperators die Eigenwerte $-\ell(\ell + 1)$ hat. Zeigen Sie:

a) $\hat{p}^2 = \left(\hat{\vec{p}} \cdot \frac{\hat{\vec{r}}}{r} \right) \left(\frac{\hat{\vec{r}}}{r} \cdot \hat{\vec{p}} \right) + \frac{1}{r^2} \hat{L}^2.$ (1 Punkt)

b) Mit $\hat{p}_r = \frac{\hbar}{i} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r$ gilt $\hat{p}^2 = \hat{p}_r^2 + \frac{1}{r^2} \hat{L}^2.$ (1 Punkt)

Hinweis: Überzeugen Sie sich, dass $(\frac{\hat{\vec{r}}}{r} \cdot \hat{\vec{p}})\psi$ als Gradient und $(\hat{\vec{p}} \cdot \frac{\hat{\vec{r}}}{r})\psi$ als Divergenz geschrieben werden kann und schlagen Sie Gradient und Divergenz in Kugelkoordinaten nach. Was bedeutet das für die Operatoren $\frac{\hat{\vec{r}}}{r} \cdot \hat{\vec{p}}$ und $\hat{\vec{p}} \cdot \frac{\hat{\vec{r}}}{r}$ in Kugelkoordinaten?

c) Der Winkelanteil des Laplaceoperators hat die Eigenwerte $-\ell(\ell + 1).$ (1 Punkt)