1. Berechnen Sie folgende Grenzwerte: (11 P.)

$$\text{a)} \quad \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}\right) \qquad\qquad \text{b)} \quad \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\cos x} - \frac{1}{\cot x}\right)$$

2. Der Entwicklungssatz lautet: (11 P.)

$$\vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) = \left(\vec{a} \cdot \vec{c}\right)\vec{b} - \left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right)\,\vec{c}$$

   (a) Berechnen Sie mit Hilfe des Entwicklungssatzes den Vektor $\vec{d}$. Das gesuchte Ergebnis ist sehr einfach.

$$\vec{d} = \vec{r} \times \left(\vec{s} \times \vec{t}\right) + \vec{s} \times \left(\vec{t} \times \vec{r}\right) + \vec{t} \times \left(\vec{r} \times \vec{s}\right)$$

   (b) Formen Sie mit Hilfe des Entwicklungssatzes den Vektor $\vec{f}$ so um, daß er kein Kreuzprodukt mehr enthält.

$$\vec{f} = \left(\vec{n} \times \vec{p}\right) \times \vec{q}$$

3. Wir betrachten in dieser Aufgabe $W = \sqrt[10]{1000}$. (13 P.)

   (a) Begründen Sie, weshalb $W \approx 2$ ist.

   (b) Wir schreiben $W = (2 + \epsilon)$. Berechnen Sie W^{10} mit dem Binomialsatz und <u>vernachlässigen</u> Sie dabei alle Terme, in denen ϵ in einer höheren Potenz als ϵ^1 auftritt. Berechnen Sie damit W auf vier Nachkommastellen genau!

4. Wir betrachten S (11 P.)

$$S = \sum_{k=0}^{105} \left(k^2 - 1\right) x^{k-2} + \sum_{m=-3}^{100} \left(2 - 10m - m^2\right) x^{m+3}\ .$$

   (a) Bringen Sie S auf die Form $\sum_n a_n x^n$. Es kann (wenige) Zusatzterme geben, die nicht in die Summe passen. Rechnen Sie sorgfältig!

   (b) Geben Sie S in geschlossener Form an. (als <u>kurze</u> Formel ohne Summenzeichen)

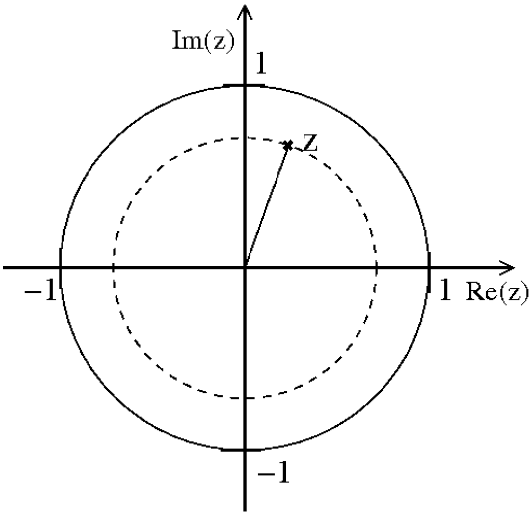
5. Unten ist eine komplexe Zahl z sowie die Kreise mit den Radien 1 und $|z|$ in der komplexen Ebene abgebildet. Die Mittelpunkte der beiden Kreise liegen im Nullpunkt. Zeichnen Sie (12 P.)

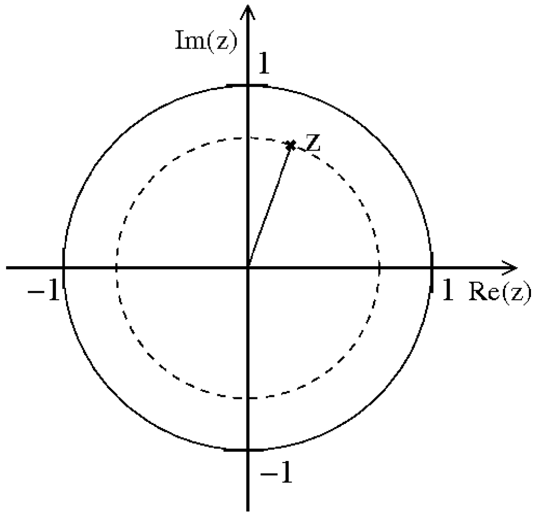
   (a) z^2, z^3 und z^4 in die linke Abbildung und

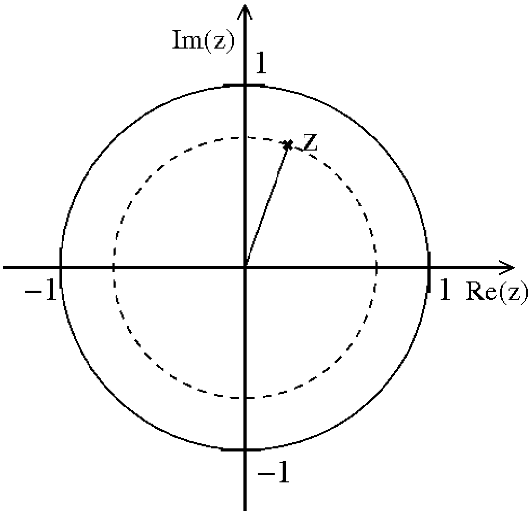
   (b) alle dritten Wurzeln von z in die rechte Abbildung.

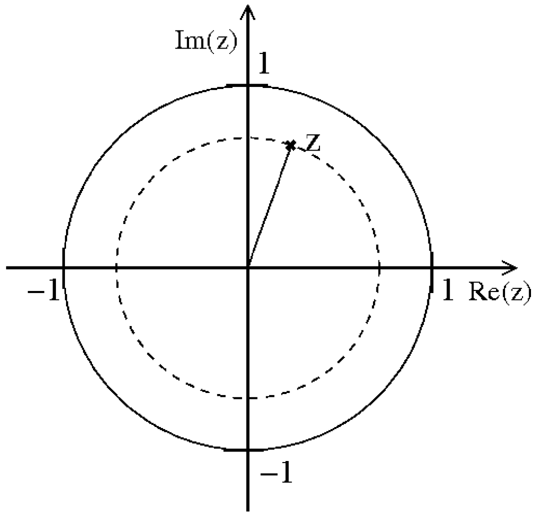
   Punkte gibt es <u>nur</u> für die richtigen Zeichnungen.
   Die beiden unteren Abbildungen sind als Reserve gedacht.

   <u>Hinweis</u> zu (5a): Der spitze Winkel zwischen z und der positiven Im(z)–Achse beträgt 20°.









6. Stellen Sie z in der Form $z = \mathrm{Re}(z) + \mathrm{Im}(z)$ dar. Mit α bezeichnen wir einen beliebigen Winkel $\alpha \in \mathbb{R}$ im Bogenmaß. (11 P.)

$$z = \frac{1}{\{\sin\alpha + i\cos(\alpha)\}\; e^{i\alpha}} + \frac{\left|e^{i(27\ln\pi+42)}\right| + \mathrm{Im}\left\{\mathrm{Im}\left(\frac{i+23}{15i^*}\, e^{e^{\pi}}\right)\right\}}{i+2+\mathrm{Im}\left\{\mathrm{Re}\left(\frac{i+22}{16i^*}\, e^{e^{-\pi}}\right)\right\} + \mathrm{Re}\left\{\mathrm{Im}\left(i+2\right)\right\}}$$

7. An einem Chemiepraktikum nehmen 12 Studierende teil, die in zwei gleich große Gruppen eingeteilt werden sollen. (11 P.)

   (a) Wieviele verschiedene Möglichkeiten N_a zur Einteilung gibt es?

   (b) Unter den 12 Studierenden gibt es vier Personen, die bereits als Laboranten ausgebildet sind. Um deren größere Erfahrung gleichmäßig zu nützen, sollen jeweils zwei von ihnen in jeder Gruppe sein. Wieviele Aufteilungen N_b sind jetzt möglich?
   Achtung: Sie wählen jetzt Studierende aus zwei verschiedenen Gruppen (mit und ohne Laborantenausbildung) aus!

   (c) Welche der Zahlen N_a und N_b ist größer? Begründen Sie Ihre Antwort!

   Die Antworten von 7a) und 7a) sind als jeweils einzige Zahl gesucht und sie sind durch Berechnungen zu begründen.

8. In dieser Aufgabe gehen wir davon aus, daß wir für Sinus und Cosinus nur jeweils die Zahlenwerte für 0° und 90° kennen. Ansonsten sei zwischen 0° und 90° nur der ungefähre Verlauf der beiden Funktionen bekannt. (siehe Abb.) Zudem kennen wir die gängigsten Beziehungen zwischen den trigonometrischen Funktionen wie das Additionstheorem für $\cos(\beta + \gamma)$ und die Formeln für $\sin(2\alpha)$ und $\cos(2\alpha)$. Ausdrücke für $\sin(3\alpha)$ und $\cos(3\alpha)$ seien noch nicht bekannt. (14 P.)

   (a) Drücken Sie $\cos(3\alpha)$ durch $\cos\alpha$ aus.

   (b) Verwenden Sie den Zahlenwert von $\cos 90°$ und das Ergebnis von (8a), um $\cos 30°$ zu berechnen!

   Himweis: $3\alpha = 2\alpha + \alpha$