Klausur Mathematik II für Molekulare Medizin und Biochemie 19. Juli 2008

Bearbeiten Sie jede Aufgabe auf einem gesonderten Blatt.
Schreiben Sie auf jedes Blatt leserlich Ihren Namen.

1. Wir betrachten $f(x) = \dfrac{(x-y)^2}{x^2-y^2}$. (8 P.)

   (a) Berechnen Sie $\lim\limits_{x\to 1}\left[\lim\limits_{y\to 1} f(x,y)\right]$ und $\lim\limits_{y\to 1}\left[\lim\limits_{x\to 1} f(x,y)\right]$.

   (b) Existiert $\lim\limits_{(x,y)\to((1,1)} f(x,y)$? Begründen Sie Ihre Antwort.

2. Gegeben ist $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin^3 x}{x^3}\,dx = \frac{3}{8}\pi$. Berechnen Sie $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin^3(\pi x)}{x^3}\,dx$. (5 P.)

3. Gegeben ist $\delta g = \left[\tan(2x) + \dfrac{2y}{\cos^2(2x)}\right] dx + [\tan(2x)+1]\; dy$.

   Überprüfen Sie, ob δg ein totales Differential ist. (5 P.)

4. Berechnen Sie die allgemeinen Lösungen von (9 P.)

   (a) $y'' - 2y' + y = 0$ (b) $y'' - 2y' + y = 3\,e^t$

5. Welcher Punkt auf der Ebene $x - y + z = 1$ liegt dem Ursprung am nächsten? Wie groß ist der Abstand? Lösen Sie die Aufgabe mit der Methode der Lagrange–Multiplikatoren. (8 P.)
   Hinweis: Minimieren Sie statt $\ell = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ die Größe $\ell^2 = x^2+y^2+z^2$.

6. (16 P.)

   (a) Gegeben ist die reguläre Matrix

   $$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

   Für $\mathbf{A}$ gilt: $\mathbf{A}^2 - \mathbf{A} - 2\,\mathbf{E} = \mathbf{0}$ $(*)$
   $\mathbf{E}$, $\mathbf{0}$: 3×3 Einheits– bzw. Nullmatrix
   Berechnen Sie aus $(*)$ die Matrix $\mathbf{A}^{-1}$, ohne eine Gauß–Jordan–Eliminierung oder algebraische Komplemente zu verwenden.

   (b) Wir betrachten die Reaktion $a\mathrm{H_2S} + b\mathrm{O_2} \to c\mathrm{H_2O} + d\mathrm{S_8}$ $(*)$.

   i. Stellen Sie ein Gleichungssystem für a, b, c und d auf, ohne Oxidationszahlen zu verwenden. Schreiben Sie das Gleichungssystem als lineares inhomogenes mit den Unbekannten a, b und d sowie einem Parameter c in der Inhomogenität.

   ii. Lösen Sie das Gleichungssystem mit der Cramerschen Regel.

   iii. Wählen Sie das kleinstmögliche c, für das alle Koeffizienten ganzzahlig sind und gleichen Sie damit $(*)$ aus.

$\sum$ 51 P.