## Klausur Mathematik für Biochemie und Chemie (I und II) 19. Juli 2008

Bearbeiten Sie jede Aufgabe auf einem gesonderten Blatt.
Schreiben Sie auf jedes Blatt leserlich Ihren Namen.

1. Gegeben sind die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \alpha\vec{c} + \vec{a} \;\text{ mit } \alpha \in I\!R$$

Berechnen Sie $\vec{f} = \vec{a} \times \left(\vec{a} \times \vec{b}\right)$. Für welche Werte von $\alpha$ wird $\vec{f}$ ein Einheitsvektor?

2. Bekanntlich gilt $1024 \approx 1000$, d. h. $2^{10} \approx 10^3$.

   (a) Entwickeln Sie $\ln(1 + x)$ um $x = 0$ bis zum linearen Glied einschließlich. Die Reihe von $\ln(1 + x)$ um $x = 0$ konvergiert für $-1 \leq x < 1$.

   (b) Berechnen Sie aus $2^{10} \approx 10^3$ einen Näherungswert für lg2. (auf eine Nachkommastelle genau)

   (c) Verwenden Sie das Ergebnis von 2a und berechnen Sie mit $2^{10} = 10^3 \cdot 1,024$ den Wert von lg2 auf drei Nachkommastellen genau. Verwenden Sie für $\ln 10$ die (für unsere Zwecke geschönte) Näherung $\ln 10 \approx 2{,}4$ .

3. Wir betrachten $f(x) = \dfrac{(x-y)^2}{x^2 - y^2}$ .

   (a) Berechnen Sie $\lim\limits_{x\to 1}\left[\lim\limits_{y\to 1} f(x,y)\right]$ und $\lim\limits_{y\to 1}\left[\lim\limits_{x\to 1} f(x,y)\right]$.

   (b) Existiert $\lim\limits_{(x,y)\to((1,1)} f(x,y)$? Begründen Sie Ihre Antwort.

4. Stellen Sie $z$ in der Form $z = a + ib$ $(a, b \in I\!R)$ dar.

$$z = \frac{|\exp(i\tan 4)|\;(1-i)^*}{(1+i)^3 \cdot (-\cos\pi + i\sin\pi)}$$

5. Gegeben ist $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin^3 x}{x^3}\,dx = \frac{3}{8}\pi$ . Berechnen Sie $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin^3(\pi x)}{x^3}\,dx$ .

6. Gegeben ist $\delta g = \left[\tan(2x) + \dfrac{2y}{\cos^2(2x)}\right] dx + [\tan(2x) + 1]\; dy$ .

   Überprüfen Sie, ob $\delta g$ ein totales Differential ist.

7. Berechnen Sie die allgemeinen Lösungen von

   (a) $y'' - 2y' + y = 0$ (b) $y'' - 2y' + y = 3\,e^t$

8. Welcher Punkt auf der Ebene $x - y + z = 1$ liegt dem Ursprung am nächsten? Wie groß ist der Abstand? Lösen Sie die Aufgabe mit der Methode der Lagrange–Multiplikatoren.
   Hinweis: Minimieren Sie statt $\ell = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ die Größe $\ell^2 = x^2 + y^2 + z^2$.