

Bestimmung der Biegesteifigkeit des Kallus aus gemessenen Verformungen am Fixateur-externe (Fraktometerstudie)

*Simon, U^{1,2} und Claes, L¹
2000*

- 1) Institut für Unfallchirurgische Forschung und Biomechanik, Universitätsklinikum Ulm
- 2) Ulmer Zentrum für Wissenschaftliches Rechnen, Universität Ulm

Gegeben:

Gemessene Verformungen an einem Fixateur-extern. Eine humane Tibia-Fraktur, die mit einem unilateralen Fixateur extern versorgt wurde, wird experimentell mit einem Biegemoment M_y in der Fixateur-Ebene belastet. Gemessen wurde die Annäherung x der beiden inneren, fraktur-nahen Schanz'schen Schrauben auf einander zu, bei ungeöffnetem Fixateur (\rightarrow Fraktometer). Bei einer freien Biegelänge der Pins (= Schanz'sche Schrauben) von ca. 60 mm wurde die Annäherung bei etwa 46 – 48 mm Abstand von der kortikalen Schale also mit ca. 12 – 14 mm Abstand vom Fixateurs-Körper ermittelt. Die Verformung hängt neben der Last natürlich von der Gesamtsteifigkeit des Systems ab. Die Gesamtsteifigkeit wiederum setzt sich aus der Fixateursteifigkeit und der Kallussteifigkeit zusammen. Ein reifendes Kallusgewebe führt zu einer Erhöhung der Kallus-Biegesteifigkeit und damit auch zu einer Reduktion der mit dem Fraktometer messbaren Verformung.

Gesucht:

Zusammenhang zwischen der gemessenen Verformung $x(t)$ und der Biegesteifigkeit $C_{Kallus}(t)$ des Fraktur-Kallus.

Annahmen / Näherungen:

1. Linearelastisches Verhalten der gesamten Struktur Kallus und Fixateur.
2. Die gemessene Verformung x kann allein abhängig von der axialen Verformung des Kallus x_K formuliert werden ($x = \lambda x_K$).
3. Die Biegesteifigkeit des Kallus ist klein gegenüber der des Fixateurs ($k_{K,\beta\beta} \ll k_{F22}$).

Gleichung:

Unter den genannten Vereinfachungen gilt folgender Zusammenhang (zur Herleitung siehe Anhang):

$$C_{Kallus} = k_{K,\beta\beta} = \frac{I_K}{A_K} \cdot \left(\frac{k_{F,z\beta}^2}{k_{F,\beta\beta}} - k_{F,zz} - \lambda \cdot \frac{k_{F,z\beta}}{k_{F,\beta\beta}} \cdot \frac{M_y}{x} \right)$$

mit:

A_K	Querschnittsfläche des Kallus
I_K	axiales Flächenmoment des Kallus
M_y	Biegemoment um medial-laterale Achse (y-Achse)
k_{Fzz}	axiale Steifigkeit des Fixateurs
$k_{F\beta\beta}$	Biegesteifigkeit des Fixateurs (in der Fixateur-Ebene)
$k_{Fz\beta}$	Koppel-Steifigkeit des Fixateurs
λ	$\approx 1/4$, Einflussfaktor zwischen der gemessenen Verformung und der Verformung im Frakturspalt

(Zahlenwerte siehe Anhang)

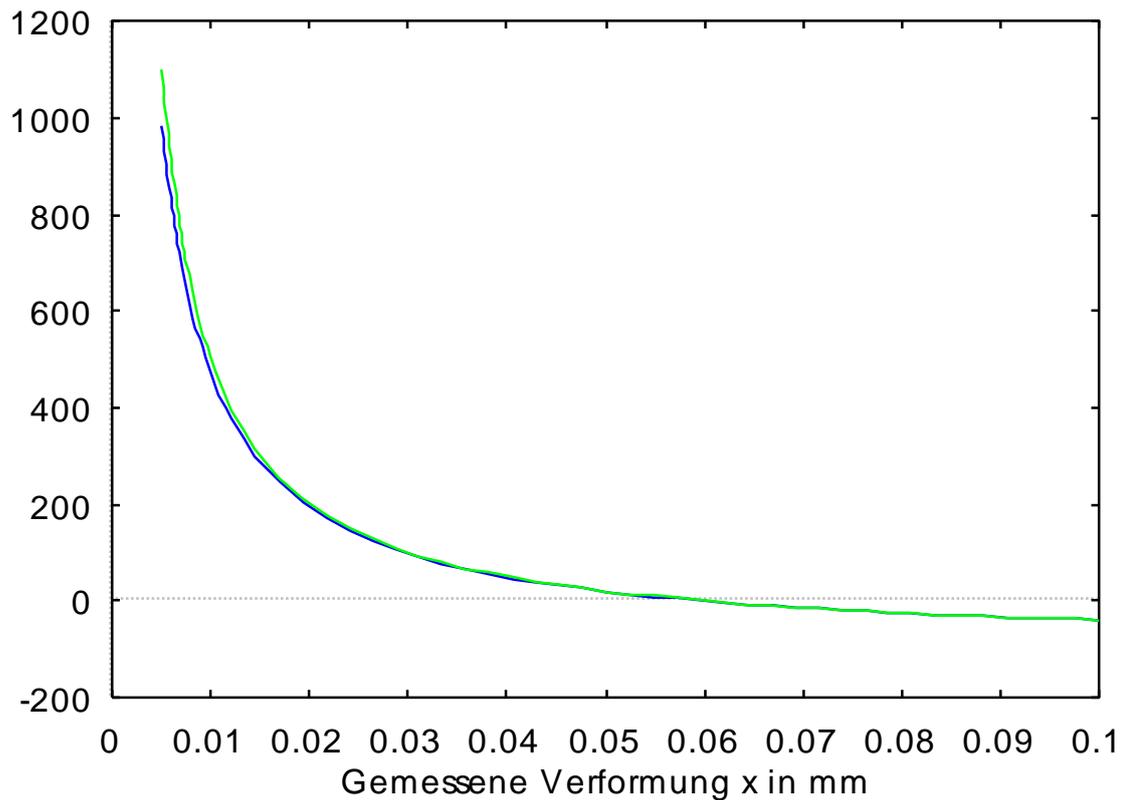
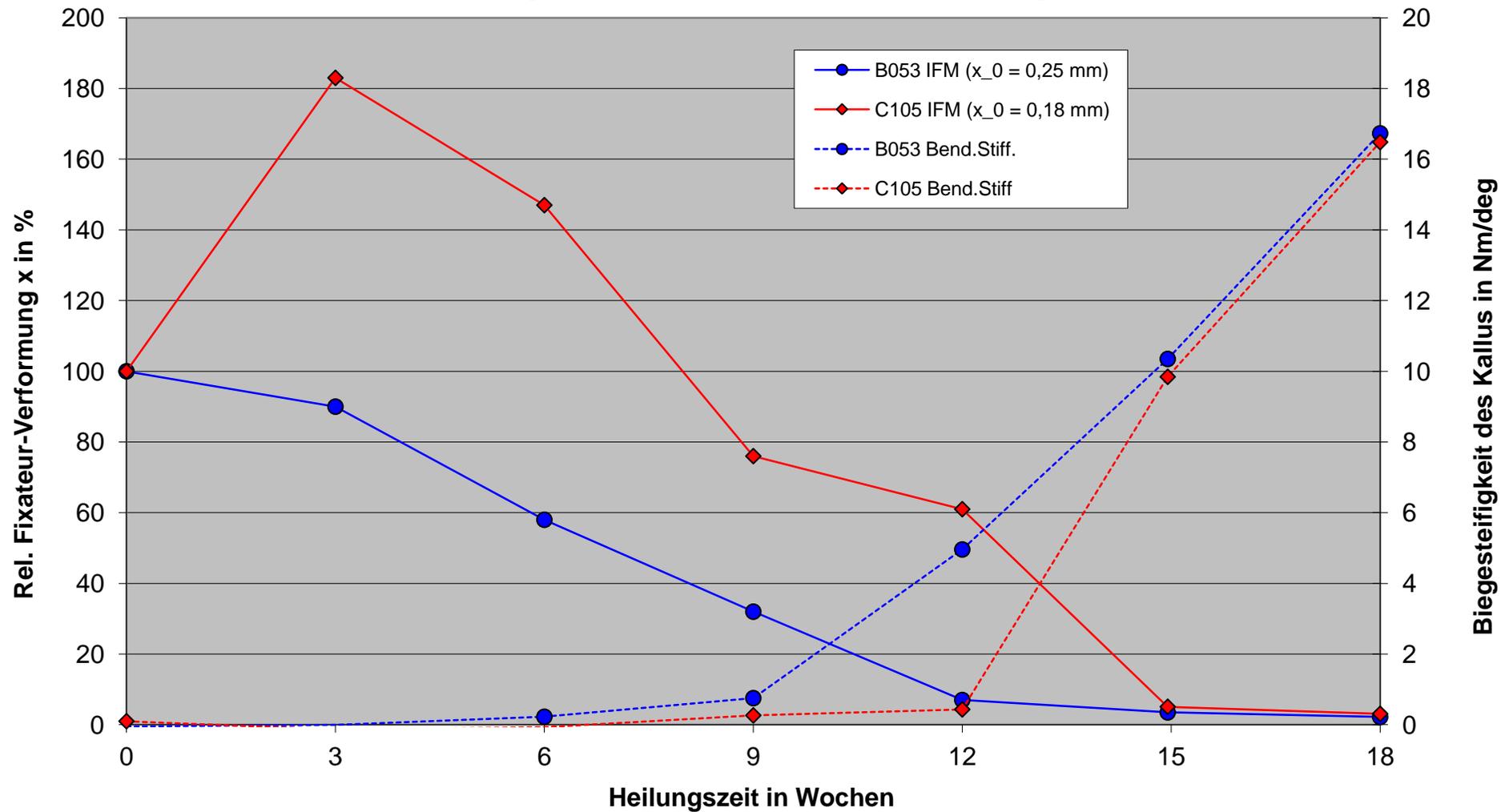


Abbildung: Biegesteifigkeit des Kallus in Abhängigkeit der gemessenen Verformungen am Fixateur. Mit zunehmender Kallusreifung bewegen wir uns auf der Abszisse nach links(!). Grüne Funktion gemäß Gleichung; blaue Funktion ohne Annahme 3 ($k_{K, \beta\beta} \ll k_{F, \beta\beta}$). Parameterwerte siehe Anhang. Bei ca. 0,06 mm wird die maximal mögliche Verformung für den Fall einer verschwindenden Kallussteifigkeit erreicht. Rechts davon machen die Kurven/Gleichungen keinen Sinn mehr.

Annahme 3 vereinfacht die Gleichung erheblich. Mit zunehmender Steifigkeit des Kallus wächst der Fehler aus dieser Vereinfachung. Die Biegesteifigkeit des Kallus wird überschätzt (vgl. Abbildung). Die nicht vereinfachte Gleichung ist im Anhang B angegeben.

Fraktometerstudie zur Kallusheilung

Berechnung der Kallusbiegesteifigkeit aus gemessenen Verformungen (Annäherung der inneren Pinns in einigem Abstand zum Fixateurskörper) bei 10 kg Axiallast



Um zwischen "geheilt" und "noch nicht geheilt" (respektive Biegesteifigkeit kleiner oder größer als ca. 15 Nm/deg) unterscheiden zu können, müsste man sicher zwischen kaum noch messbaren Unterschieden sehr kleiner Verformungen unterscheiden können. Hier liegt die grundsätzliche Schwierigkeit dieser Messmethoden.

Anhang A: Eingabe-Datei für Formelmanipulationsprogramm (REDUCE)

```
%-----
% Aufruf:                > in "fixateur.red"$ <
%-----
TITEL    := "Kallussteifigkeit aus Fixateurverformung";
BIGLINE  := "-----"$
LINE     := "-----"$

fancy_print_df:=indexed;
%on factor;
on rational;

write BIGLINE$
write TITEL$
write BIGLINE$
out "reduce.out";
write BIGLINE$
write TITEL$
write BIGLINE$

clear mm, n;
clear k_f, k_k, k, h;
clear h12, h22, dx, E_k;
clear gleichg, liste, E1, E2$
clear kf11, kf22, kf12$
clear C_k, L_k, d_k, Mb, lam_x, lam_phi;

matrix k_f, k_k, k, h$

write "Steifigkeitsmatrizen ..."$
A_k:=(pi/4)*d_k^2$           % Querschnitt, Kallus
I_k:=(pi/64)*d_k^4$         % ax. Fl.-Moment, Kallus
kk11:=E_k*A_k/L_k$         % axiale Steifigkeit, Kallus
kk22:=E_k*I_k/L_k$         % Biegesteifigkeit, Kallus, << kf22
%kk22:=0$                  % ... kann evtl. vernachlaessigt werden.
kk12:=0$

write "... Kallus:"$
k_k:=mat((kk11, kk12), (kk12, kk22));

write "... Fixateur:"$
k_f:=mat((kf11, kf12), (kf12, kf22));

write "... Gesamtsystem:"$
k:=k_f + k_k;

write LINE$
write "Nachgiebigkeitsmatrix:"$
h:=k^(-1);

h12:=h(1,2)$
h22:=h(2,2)$

%--- Gemessene Abstandsaenderung zw. Schanzschen Schrauben dx=f(E_k)
x:=h12*Mb$                  % Laengenaenderung, Kallus
phi:=h22*Mb$                % Verbiegewinkel, Kallus
gleichg:={dx=lam_x*x + lam_phi*phi}$

%--- Gleichung umformen nach E_k
korder dx$
liste:=solve(gleichg, E_k)$

write LINE$
write "E-Modul, Kallus = f(dx):"$
E1:=part(liste, 1, 2);      % 1. Loesung der quadr. Gleichg.
E2:=part(liste, 2, 2);      % 2. Loesung der quadr. Gleichg.
```

```

write LINES$
write "Biegesteifigkeit C_K des Kallus = f(dx):"$
C_k:=E1*I_K/L_K;

write LINES$
write "Naeherungs-Formel:"$
C2:=(I_k/A_k)*(kf12^2/kf22 - kf11 - kf12*lam_x*Mb/(kf22*dx));

write LINES$
write "Numerische Auswertung:"$
on rounded$

% Kallus-Parameter
L_k:=3*mm;           % Laenge, Kallus
d_k:=40*mm;          % Durchmesser, Kallus

% Fixateur-Parameter
kf11:=2e3*N/mm;     % 1e3 Axiale Steifigkeit
kf22:=1e7*N*mm;     % Nmm/rad Biegesteifigkeit (in plane)
kf12:=-1e5*N;       % -9.3e4 Koppelsteifigkeit

% Messung
Mb:=80*N*300*mm;    % Biegemoment
lam_x:=1/4;         % Einflussfaktor, ax. Versch. auf dx
lam_phi:=0*mm;      % Einflussfaktor, Verbiegewinkel auf dx

E1:=E1;
C_k:=C_k;
C2:=C2;

shut "reduce.out";

%----- Plot

% dim' los machen
mm:=1$
n:=1$

%on trplot:          % mit Liste der gnuplot-Befehle
%plotreset;
x_label:="Gemessene Verformung x in mm"$
y_label:="Biegesteifigkeit C_K des Kallus in Nm/rad"$
plot(C_k/1000, C2/1000, dx=(0.005 .. 0.1), xlabel=x_label, ylabel=y_label);
%plot(E_Kal=E1, dx=(0.001 .. 10.0), logscale="x");

;
end;

```

Anhang B: Ergebnis-Datei

Kallussteifigkeit aus Fixateurverformung

Steifigkeitsmatrizen ...

... Kallus:

$$k_k := \begin{bmatrix} 1 & 2 & & \\ \frac{1}{4} * d_k * e_k * \pi & & & \\ 4 & & & \\ \frac{1}{l_k} & & 0 & \\ & l_k & & \\ & & 1 & 4 \\ & & \frac{1}{64} * d_k * e_k * \pi & \\ & & 64 & \\ 0 & & \frac{1}{l_k} & \\ & & & l_k \end{bmatrix}$$

... Fixateur:

$$k_f := \begin{bmatrix} kf11 & kf12 \\ & \\ kf12 & kf22 \end{bmatrix}$$

... Gesamtsystem:

$$k := \text{mat}\left(\left(\frac{1}{4} * (d_k * e_k * \pi + 4 * kf11 * l_k), kf12\right), \left(kf12, \frac{1}{64} * (d_k * e_k * \pi + 64 * kf22 * l_k)\right)\right)$$

Nachgiebigkeitsmatrix:

$$h := \text{mat}\left(\left(\frac{4}{d_k * e_k * \pi + 4 * d_k * e_k * kf11 * l_k * \pi + 64 * d_k * e_k * kf22 * l_k * \pi + 256 * kf11 * kf22 * l_k^2 - 256 * kf12^2 * l_k^2}, \left(-256 * kf12 * l_k^2 / (d_k * e_k * \pi + 4 * d_k * e_k * kf11 * l_k * \pi)\right)\right)\right)$$

$$\begin{aligned}
& + 64*d_k^2 * e_k * k f_{22} * l_k * \pi \\
& + 256 * k f_{11} * k f_{22} * l_k^2 - 256 * k f_{12}^2 * l_k^2 \Big), \\
& \Big((-256 * k f_{12}^2 * l_k^2) / (d_k^2 * e_k * \pi) \\
& + 4 * d_k^4 * e_k * k f_{11} * l_k * \pi \\
& + 64 * d_k^2 * e_k * k f_{22} * l_k * \pi \\
& + 256 * k f_{11} * k f_{22} * l_k^2 - 256 * k f_{12}^2 * l_k^2 \Big), (64 \\
& * l_k * (d_k * e_k * \pi + 4 * k f_{11} * l_k)) / (\\
& d_k^6 * e_k^2 * \pi^2 + 4 * d_k^4 * e_k * k f_{11} * l_k * \pi \\
& + 64 * d_k^2 * e_k * k f_{22} * l_k * \pi \\
& + 256 * k f_{11} * k f_{22} * l_k^2 - 256 * k f_{12}^2 * l_k^2 \Big) \Big)
\end{aligned}$$

E-Modul, Kallus = f(dx) (2 Loesungen E1 und E2):

$$\begin{aligned}
e1 := & \Big(-2 * dx * d_k^4 * k f_{11} * l_k - 32 * dx * d_k^2 * k f_{22} * l_k + 32 * \\
& \sqrt{\frac{1}{256} * dx^2 * d_k^4 * k f_{11}^2 - \frac{1}{8} * dx^2 * d_k^2 * k f_{11} * k f_{22}} \\
& + \frac{1}{4} * dx^2 * d_k^2 * k f_{12}^2 + dx^2 * k f_{22}^2 \\
& + \frac{1}{8} * dx * lam_phi * d_k^2 * k f_{11} * mb \\
& - 2 * dx * lam_phi * k f_{22} * mb \\
& - \frac{1}{4} * dx * d_k^2 * k f_{12} * lam_x * mb + lam_phi^2 * mb^2 \Big) \\
& * \text{abs}(d_k^2 * \text{abs}(l_k) + 32 * lam_phi * d_k^2 * l_k * mb) / (dx * d_k^6 \\
& * \pi)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e2 := & \Big(-2 * dx * d_k^4 * k f_{11} * l_k - 32 * dx * d_k^2 * k f_{22} * l_k - 32 * \\
& \sqrt{\frac{1}{256} * dx^2 * d_k^4 * k f_{11}^2 - \frac{1}{8} * dx^2 * d_k^2 * k f_{11} * k f_{22}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 256 \qquad \qquad \qquad 8 \\
& + \frac{1}{4} dx^2 d_k^2 kf12^2 + dx^2 kf22^2 \\
& + \frac{1}{8} dx lam_phi d_k^2 kf11 mb \\
& - 2 dx lam_phi kf22 mb \\
& - \frac{1}{4} dx d_k^2 kf12 lam_x mb + lam_phi^2 mb^2 \\
& *abs(d_k)^2 *abs(l_k)^2 + 32 a_phi d_k^2 l_k mb^6 / (dx d_k^6 \\
& *pi)
\end{aligned}$$

Biegesteifigkeit C_K des Kallus = f(dx) :

$$\begin{aligned}
c_k := & \left(\frac{1}{2} * \sqrt{\frac{1}{256} dx^2 d_k^2 kf11^2} \right. \\
& - \frac{1}{8} dx^2 d_k^2 kf11 kf22 \\
& + \frac{1}{4} dx^2 d_k^2 kf12^2 + dx^2 kf22^2 \\
& + \frac{1}{8} dx a_phi d_k^2 kf11 mb \\
& - 2 dx a_phi kf22 mb \\
& - \frac{1}{4} dx d_k^2 kf12 lam_x mb + a_phi^2 mb^2 \\
& *abs(d_k)^2 *abs(l_k)^2 + a_phi d_k^2 l_k mb \\
& \left. - \frac{1}{16} d_k^4 dx kf11 l_k - d_k^2 dx kf22 l_k \right) / \\
& (d_k^2 dx l_k)
\end{aligned}$$

Naeherungs-Formel :

c2 :=

$$-\frac{1}{16}d_k^2 * (dx * kf11 * kf22 - dx * kf12^2 + kf12 * lam_x * mb)$$

$$dx * kf22$$

Numerische Auswertung:

*** Domain mode rational changed to rounded

l_k := 3*mm

d_k := 40*mm

kf11 := $\frac{2000.0 * n}{mm}$

kf22 := 1.0e+7*mm*n

kf12 := - 1.0e+5*n

mb := 24000*mm*n

lam_x := 0.25

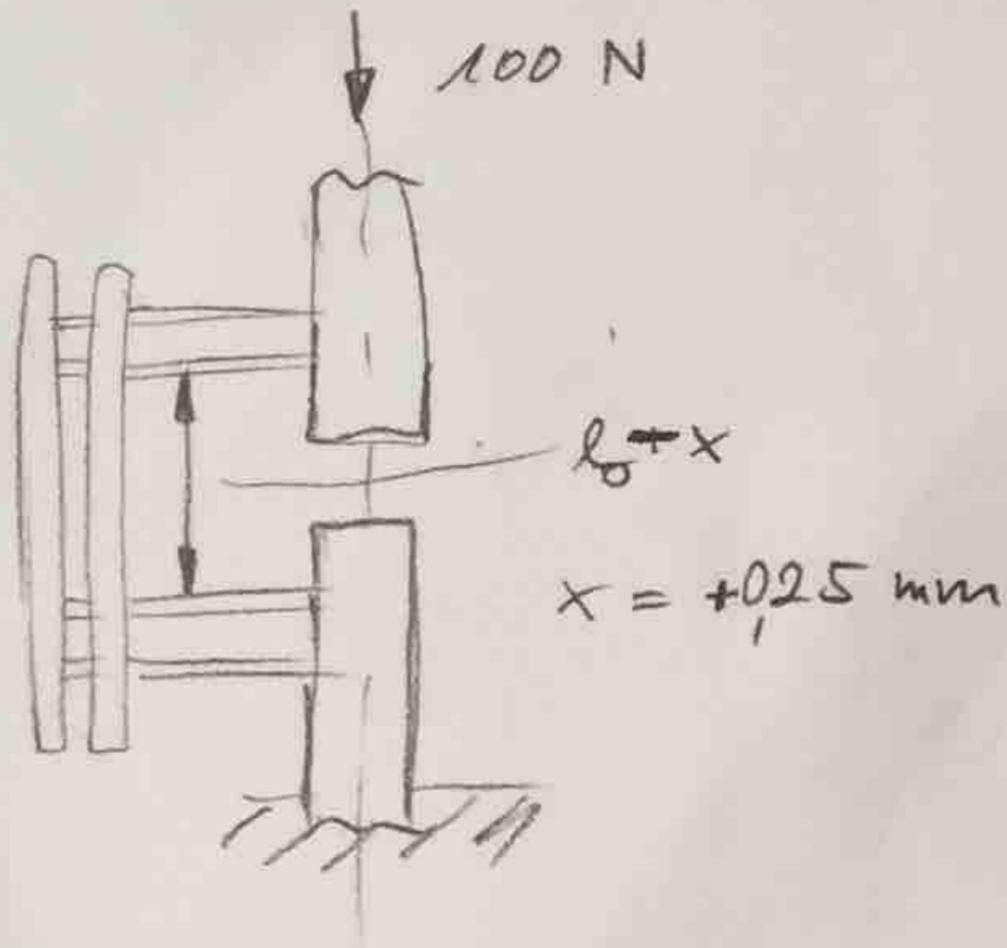
a_phi := 0

e1 := $(0.00001194 * ((1.0e+14 * dx + 2.4e+11 * mm) * dx)^{0.5} * abs(mm)^4 * abs(n)^4 - 121.8 * dx * mm^4 * n) / (dx * mm^6)$

c_k := $(0.5 * ((1.0e+14 * dx + 2.4e+11 * mm) * dx)^{0.5} * abs(mm)^4 * abs(n)^4 - 5.1e+6 * dx * mm^4 * n) / (dx * mm^3)$

c2 := $\frac{mm * n * (- 1.0e+5 * dx + 6000.0 * mm)}{dx}$

Stüfigkeit des Fixateurs B053



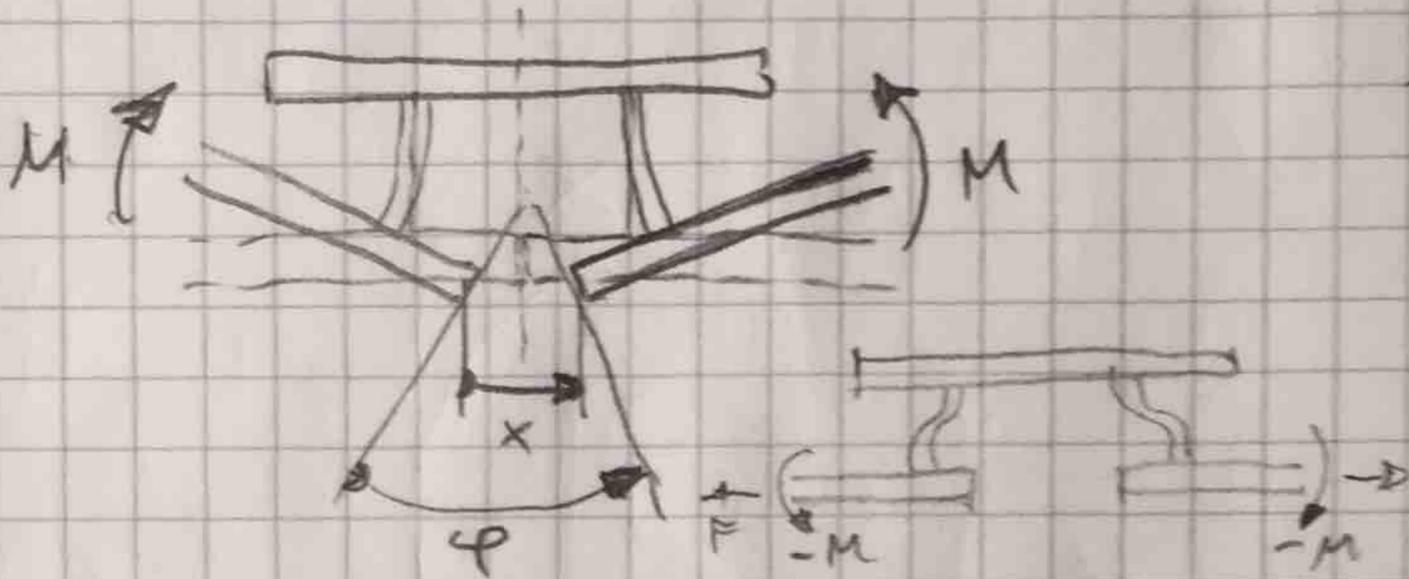
$$\underline{x} = \underline{\underline{H}} \underline{\underline{\delta}}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & & & & & | \\ & h_{zz} & & & & \\ | & & & & & | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \\ M_x \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 100 \text{ N} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$h_{zz} = \frac{100 \text{ N}}{0,25 \text{ mm}} = 400 \frac{\text{N}}{\text{mm}}$$

1) Steifigkeit Fixateur

$$\begin{pmatrix} F \\ M \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} k_{f11} & k_{f12} \\ k_{f12} & k_{f22} \end{pmatrix}}_{\underline{\underline{K_F}}} \begin{pmatrix} x \\ \varphi \end{pmatrix}$$



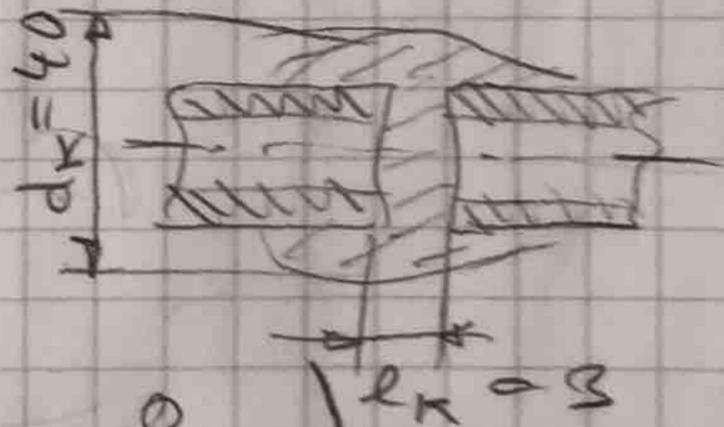
$$\begin{pmatrix} x \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{f11} & h_{f12} \\ h_{f12} & h_{f22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F \\ M \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{K_F}} = \begin{pmatrix} 2000 \text{ N/mm} & -1 \cdot 10^5 \text{ N} \\ -1 \cdot 10^5 \text{ N} & 1 \cdot 10^7 \text{ Nmm} \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{Quelle:} \\ \text{Pohl} \end{array}$$

2) Steifigkeit Kallus

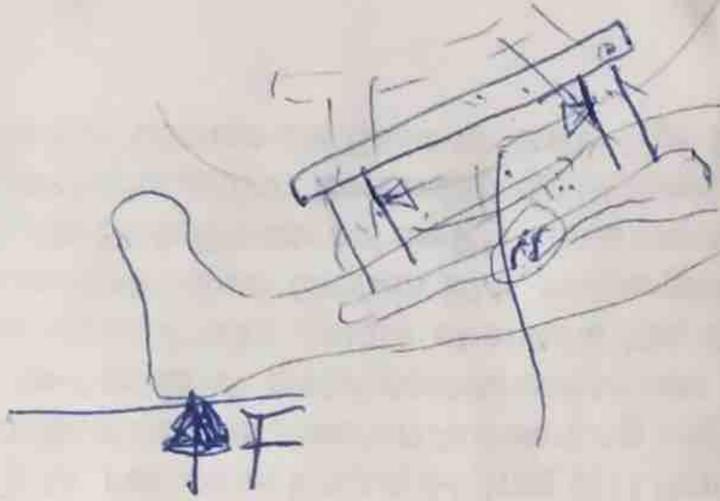
Bei

$$E_{\text{Kall}} = 10 \text{ MPa}$$

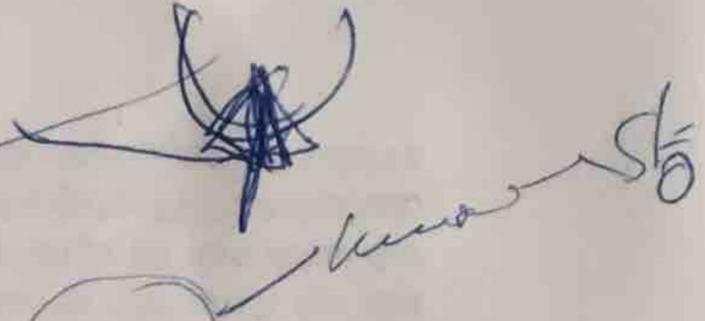


$$\underline{\underline{K_K}} = \begin{pmatrix} 4200 \text{ N/mm}^2 & 0 \\ 0 & 4,2 \cdot 10^5 \text{ Nmm} \end{pmatrix} \quad l_K = 3$$

K_{22} kann evtl. vernachlässigt werden

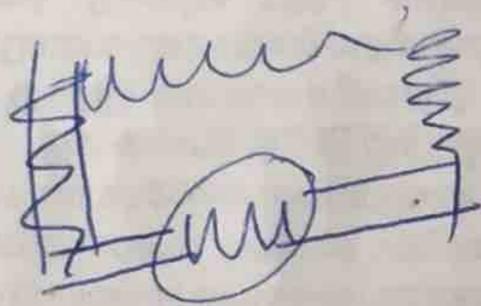


z.B. $0,65 \text{ mm}$

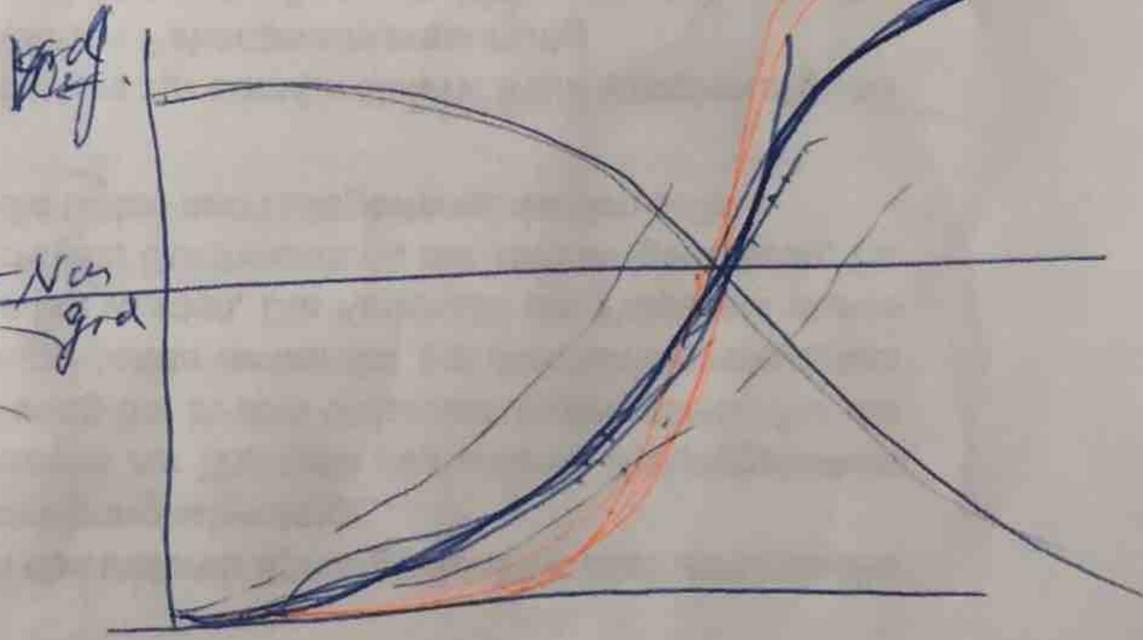


0,3

$< 0,1$ geteilt

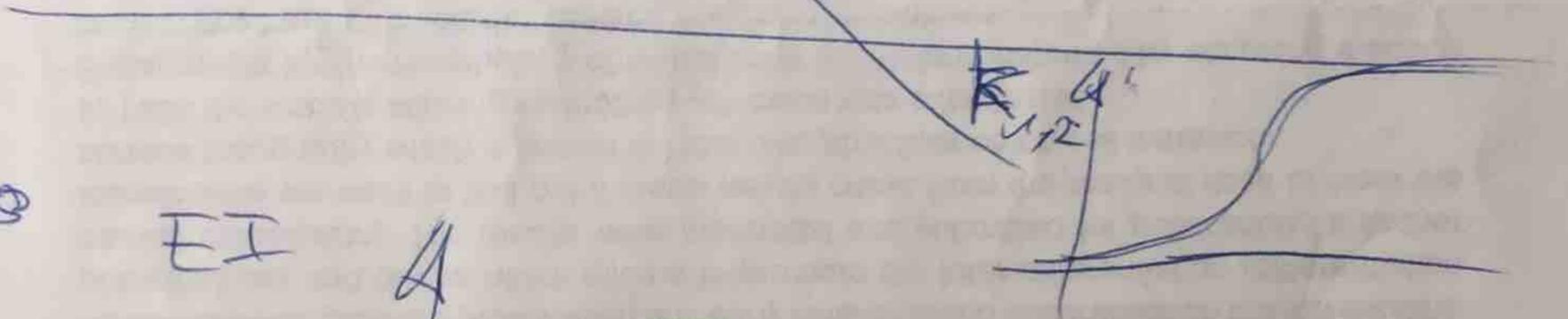
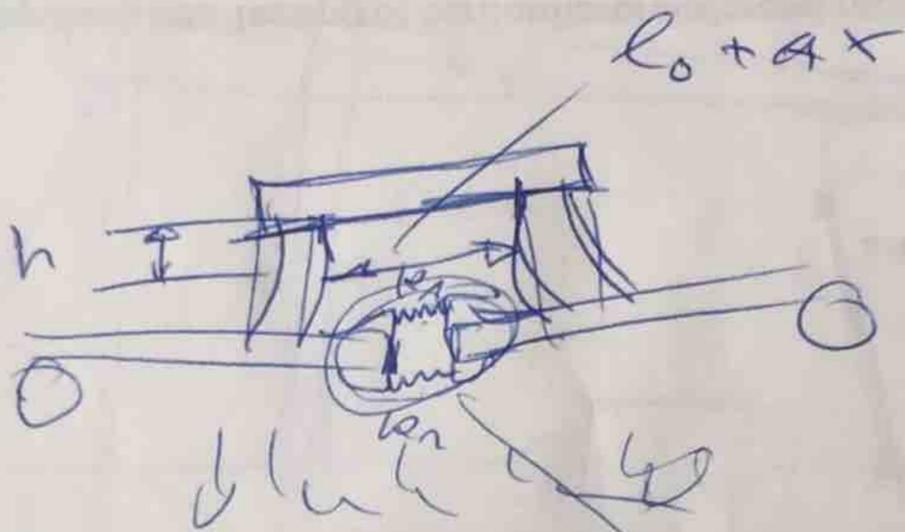
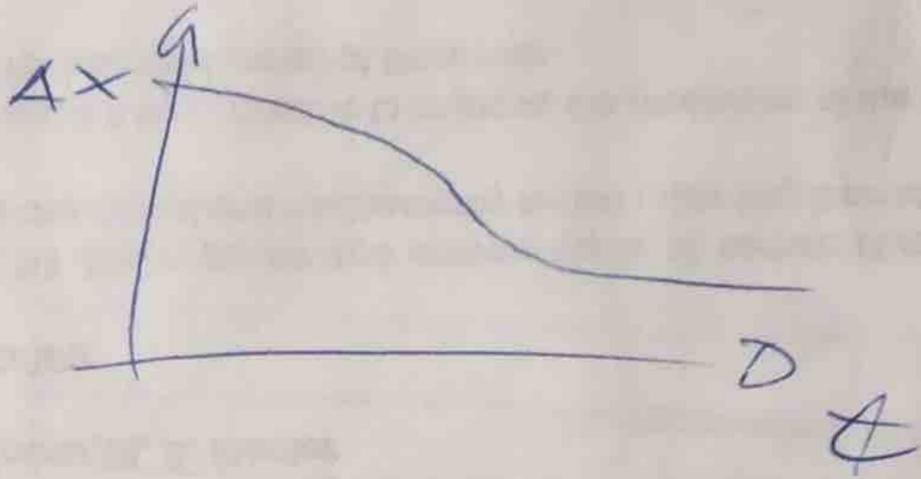


Biegest $> 15 \frac{\text{Nm}}{\text{Grad}}$



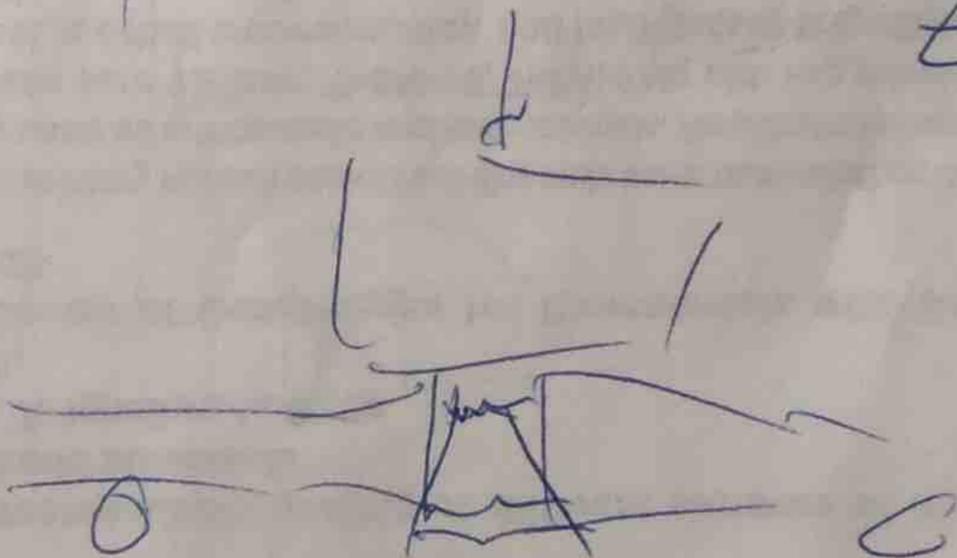
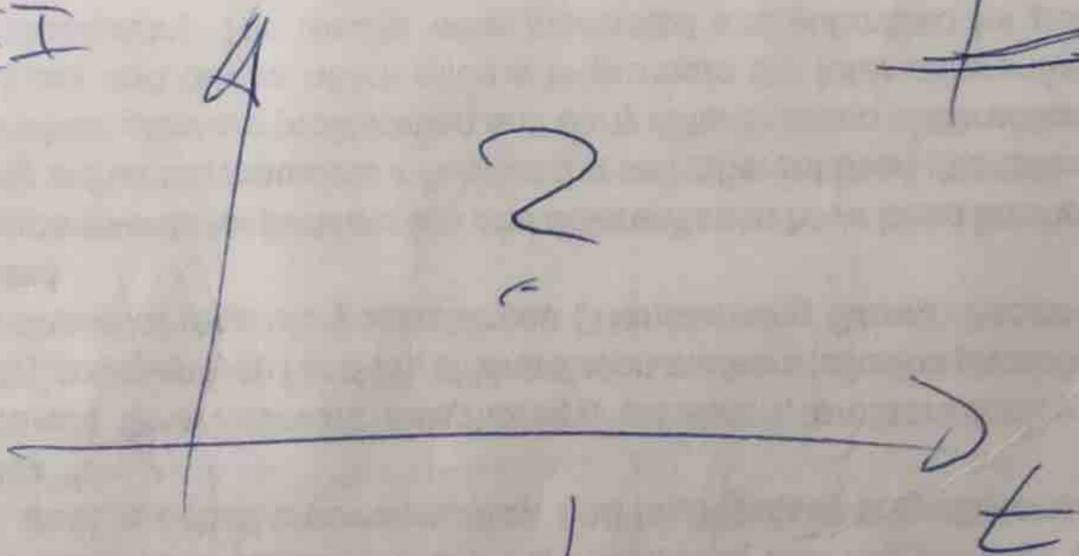
AO-Doppelrohr

beg.

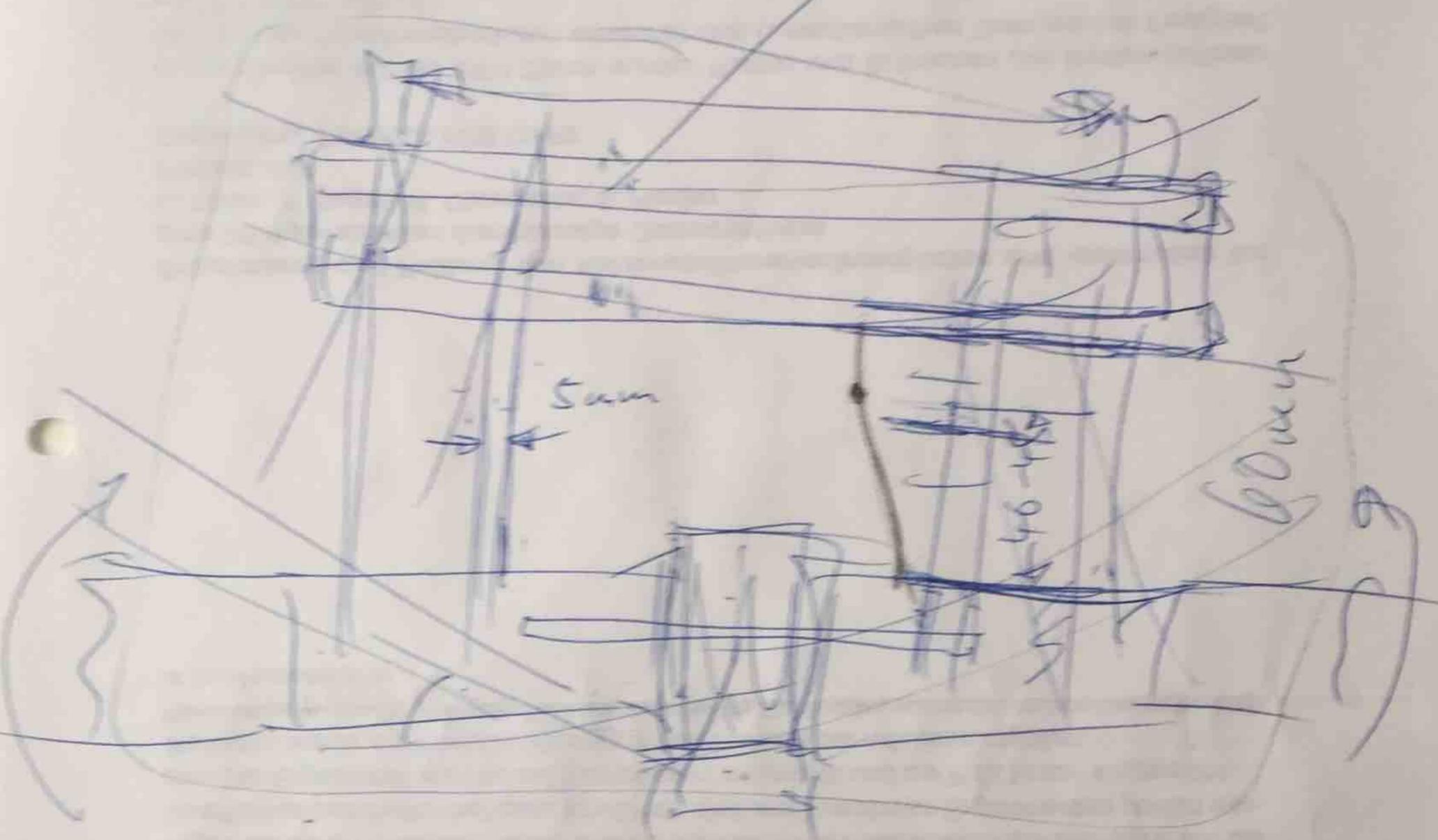


Geo

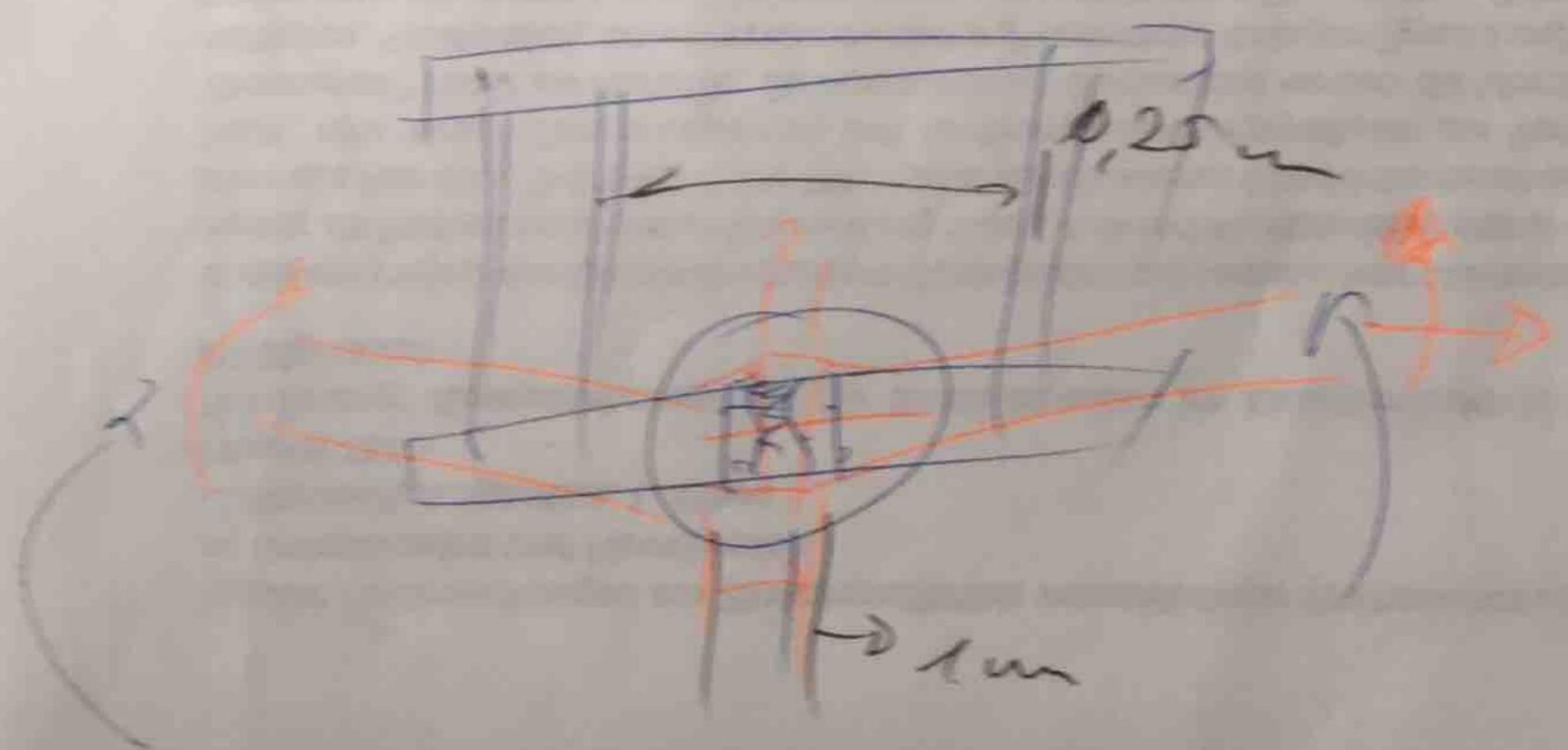
EI



EI



$k_1 \rightarrow EI$



Dada 31 (98) S. 247

$$k_{zz} = 425 \text{ N/mm}$$

$$k_{\beta\beta} = 36 \frac{\text{Nm}}{\text{deg}} = 36.000 \cdot 60 \frac{\text{Nm}}{\text{rad}}$$

$$= 2 \cdot 10^6 \text{ Nm}$$

$$k_{z\beta} = 4,5 \frac{\text{Nm}}{\text{mm}} \text{ oder } - 62,9 \frac{\text{N}}{\text{deg}}$$

22
e o

Dünden

Ziel $10 \frac{\text{Nm}}{\text{deg}} \approx 600 \frac{\text{Nm}}{\text{rad}}$ ✓