

INSTITUT FÜR UNFALLCHIRURGISCHE FORSCHUNG UND BIOMECHANIK

Grundlagen der Biomechanik
des Bewegungsapparates

Grundlagen der Kinematik und Dynamik

Dr.-Ing. Ulrich Simon

Ulmer Zentrum für Wissenschaftliches Rechnen

www.uni-ulm.de/uzwr

Inhaltsverzeichnis

1. Kinematik.....	3
1.1. Koordinatensysteme	3
1.2. Translation und Rotation	5
1.3. Weg und Winkel.....	5
1.4. Geschwindigkeit.....	6
1.5. Momentanpol	7
1.6. Beschleunigung	8
1.7. Zusammenfassung.....	9
2. Kinetik / Dynamik.....	12
2.1. d'Alembertsches Prinzip	12
2.2. Energie, Arbeit, Leistung	13
2.2.1. Energie	13
2.2.2. Arbeit	14
2.2.3. Leistung.....	15

1. Kinematik

Die Kinematik (griechisch *kinema* = Bewegung) beschreibt und analysiert Bewegungen von Körpern, ohne die verursachenden oder dabei entstehenden Kräfte zu betrachten.

Oft werden die beteiligten Körper zur Vereinfachung als starr betrachtet. Dann kann man die Bewegung des Systems mit endlich vielen Lage-Variablen beschreiben.

Kennt man die Lage der beteiligten Körper zu jedem Zeitpunkt, so ist die Bewegung vollständig beschrieben. Kinematik ist also „**zeitveränderliche Geometrie**“. Typische Anwendungsgebiete in der Biomechanik sind die *Ganganalyse* und die *Gelenkinematik*.

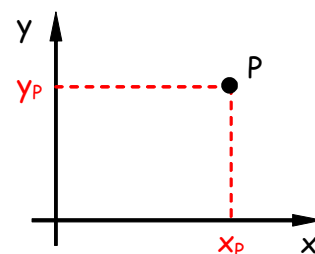
Zum Merken:

Kinematik = zeitveränderliche Geometrie.

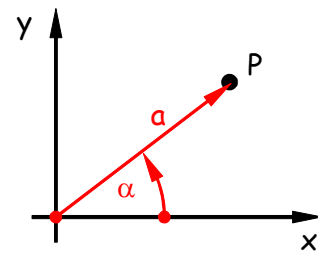
1.1. Koordinatensysteme

In der Geometrie gilt es **Wege s** und **Winkel φ** zu messen. Diese sind so genannte *Zwei-Punkt-Größen*, d.h. sie werden zwischen zwei Punkten und nicht wie die *Ein-Punkt-Größen* (z.B. Temperatur) an einem Punkt im Raum ermittelt. Dies ist ein praktisch wichtiger Aspekt. Bevor man die Lage eines Körpers messen kann, muss man Referenzpunkte festlegen, z.B. in Form eines Koordinatensystems. Ein Koordinatensystem (für den drei-dimensionalen Raum) ist durch die Lage seines Ursprungspunktes und dreier (verschiedener) Richtungen definiert. In der Ebene (zwei-dimensionaler Raum) reichen zwei verschiedene Richtungen aus. Für die Ebene sind zwei Typen von Koordinatensystemen beliebt:

- a) Kartesisches Koordinaten-System: Durch die Definition zweier zueinander senkrechter Achsen, die aus dem Ursprung hervorgehen. Ein Punkt P hat nun zwei Koordinaten, das sind die Distanzen x_P und y_P , die man in Richtungen der x -Achse, bzw. y -Achse messen kann.



- b) Polares Koordinaten-System: Ein Punkt P hat wiederum zwei Koordinaten: Eine Winkellage α relativ zur x-Achse und einen Abstand a vom Ursprung.



Absolute und relative Koordinaten:

Absolute Koordinaten vermessen die Lage eines Körpers in einem so genannten *Inertialsystem*, also gegenüber einer feststehenden, nicht beschleunigten Umgebung.

Relative Koordinaten vermessen die Lage eines Körper gegenüber einem anderen bewegten und beschleunigten Körper. Mit einem *Goniometer* zwischen Femur und Tibia beispielsweise werden beim Gang relative Koordinaten aufgezeichnet.

Beispiel Ganganalyse:

Bei der Ganganalyse spielen die Winkel eine besondere Rolle, da die Stellungen der Gliedmaßen zueinander mit Winkeln beschrieben werden können (vgl. Abb 1). Im Bild wird die Winkellage des Unterschenkels mit der *absoluten Koordinate* φ_0 gegenüber der Horizontalen und mit der *relativen Koordinate* φ_1 gegenüber dem Oberschenkel vermessen.

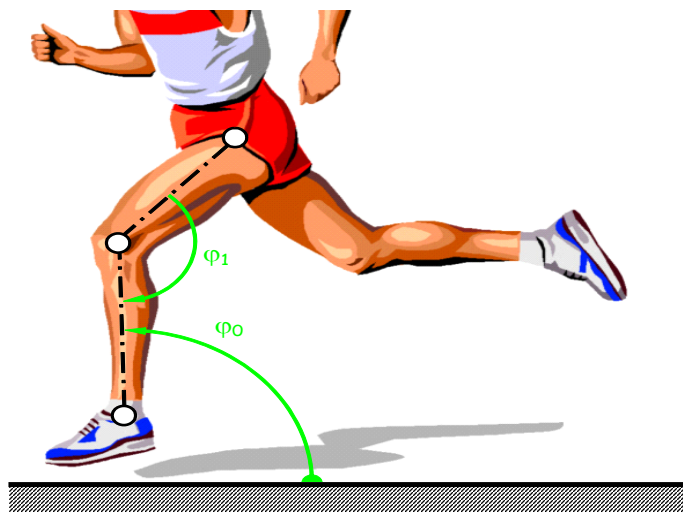


Abb 1: Absolute und relative Koordinaten.

1.2. Translation und Rotation

Man unterscheidet zwei verschiedene Arten von Bewegungen: Translationen und Rotationen. Während Translationen (Verschiebungen) mit Wegen beschrieben werden, erfassen Winkel Rotationen (Verdrehungen, Kippungen).

Bei der **Translation** bewegen sich alle Punkte eines Körpers auf parallelen Bahnen gleicher Länge. Der Körper erfährt eine Parallel-Verschiebung (vgl. **Abb. 2**).

Bei der **Rotation** bewegen sich alle Punkte eines Körpers auf Kreisbahnen. Der zurückgelegte Weg ist für Punkte, die sich weiter vom Drehzentrum entfernt befinden, größer.

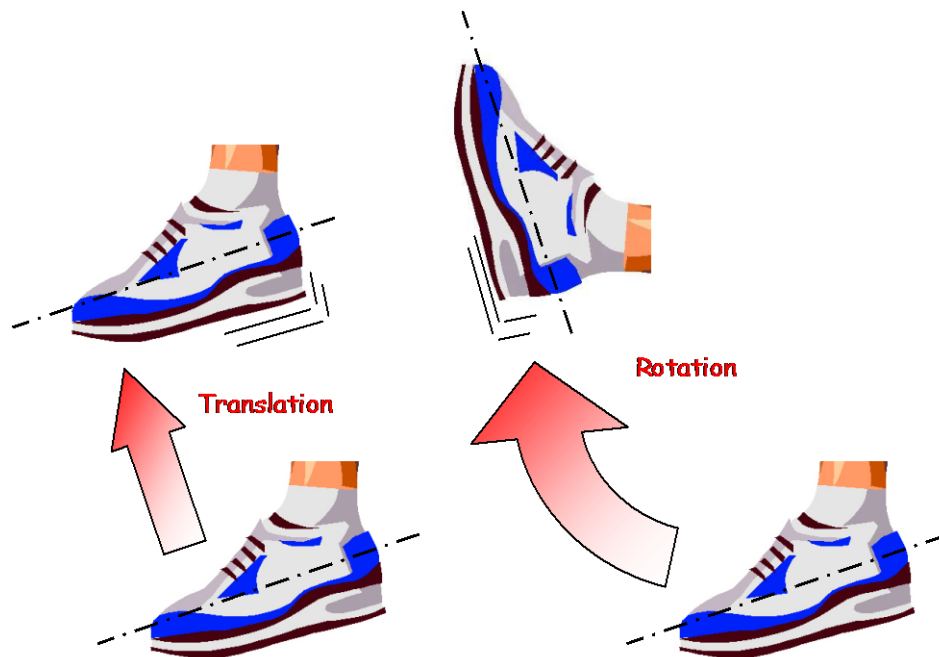


Abb. 2: Translation und Rotation.

1.3. Weg und Winkel

Der **Weg** ist definiert als der Abstand zwischen zwei Punkten. Gemessen wird der Weg in der

Einheit: Meter m.

Mit Wegen können Translationen (Verschiebungen) von Körpern gemessen werden.

Beispiel zur Wegmessung bei einer Translation:

Ein Beispiel aus der Praxis ist der „Reichweite-Test“ (Abb. 3). Der Weg s zwischen der Ausgangslage und der gebeugten Lage dient hierbei als Maß für die Koordinationsfähigkeit eines Menschen. Die horizontale Position der Fingerspitzen bei aufrechtem Stand ist die Referenzlage gegenüber der, die aktuelle Lage s der Fingerspitzen gemessen wird.

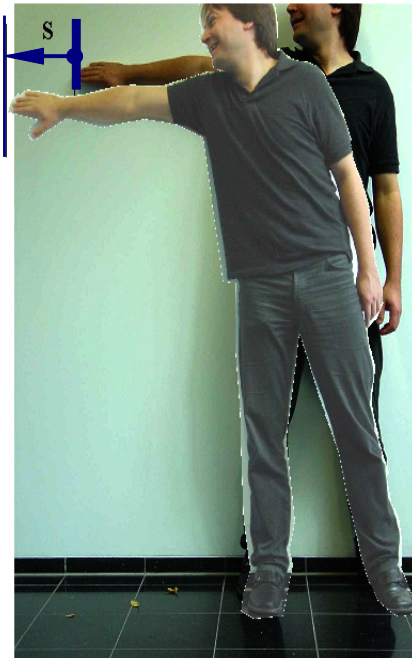


Abb. 3: Reichweite-Test

Der **Winkel** wird zwischen zwei Geraden gemessen.

Die Einheit ist:

Grad (engl.: degree): $^{\circ}$

Bogenmaß, Radian (engl.: radian): $\text{rad} = 1$

Ein voller Kreis besitzt einen Winkel von 360° und ein Bogenmaß von $2\pi \text{ rad} = 2\pi$. Daraus folgt die Umrechnung:

$$2\pi \text{ rad} = 360^{\circ}, \quad 1 \text{ rad} \approx 60^{\circ}$$

1.4. Geschwindigkeit

In der Kinematik werden Bewegungen betrachtet. Die Lage der Körper verändert sich mit der Zeit. Die Lagekoordinaten (Wege, Winkel) sind Funktionen der Zeit t .

Die Geschwindigkeit kann man aus der Weg-Zeit-Funktion (vgl. Abb. 5) ableiten:

$$v(t) = \frac{ds(t)}{dt}.$$

Die **Einheit** der Geschwindigkeit ist: $\frac{\text{Meter}}{\text{Sekunde}} = \frac{\text{m}}{\text{sec}}$.

Aus dem alltäglichen Leben ist die Einheit

$$\frac{\text{Kilometer}}{\text{Stunde}} = \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

geläufiger. Es gilt:

$$1 \frac{\text{m}}{\text{sec}} = \frac{\text{m} \cdot 3600 \text{ sec} \cdot \text{km}}{\text{sec} \cdot 1000 \text{ m} \cdot \text{h}} = 3,6 \frac{\text{km}}{\text{h}} .$$

Bei der **Translation** besitzen alle Punkte des Körpers zu jedem Zeitpunkt die gleiche Geschwindigkeit nach Betrag und Richtung.

Bei der **Rotation** besitzen die Punkte des Körpers unterschiedliche Geschwindigkeiten nach Betrag und Richtung.

1.5. Momentanpol

Eine allgemeine Bewegung lässt sich immer aus einer reinen Translation und einer reinen Rotation zusammensetzen. Zu jedem Zeitpunkt muss es einen Punkt geben, der gerade keine Geschwindigkeit hat. Dieser Punkt liegt aber nicht immer auf dem Körper. Dieser Punkt wird **Momentanpol** (vgl. Abb. 4) genannt. Die Verbindungsgerade zwischen dem Momentanpol und einem Punkte des Körpers liegt stets senkrecht zum Geschwindigkeitsvektor an diesem Punkt. Der Betrag der Geschwindigkeit in diesem Punkt wächst mit dem Abstand zum Momentanpol linear an. Der Körper dreht sich augenblicklich um den Momentanpol.



Abb. 4: Momentanpol M

1.6. Beschleunigung

Die Beschleunigung kann man aus der Geschwindigkeits-Zeit-Funktion (vgl. *Abb.*) ableiten:

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} .$$

Die **Einheit** der Beschleunigung ist: $\frac{\text{Meter}}{\text{Sekunde}^2} = \frac{\text{m}}{\text{sec}^2}$.

Beispiel: „Erdbeschleunigung“:

$$g = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{sec}^2} = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{sec}^2} \approx 36 \frac{\text{km}}{\text{h}} / \text{sec} .$$

Beim freien Fall ohne Luftwiderstand nimmt die Geschwindigkeit in jeder Sekunde also um 36 km/h zu!

Sonderfälle:

Ein Körper, der sich mit konstanter Geschwindigkeit längs einer geraden Bahn bewegt (Translation), erfährt keine Beschleunigung (da gilt: $\Delta v = 0$).

Ein Körper jedoch, der sich mit konstanter Geschwindigkeit längs einer Kreisbahn bewegt, erfährt eine konstante Beschleunigung obwohl sich der Betrag der Geschwindigkeit nicht ändert. Allerdings wird die Richtung der Geschwindigkeit laufend geändert. Die Beschleunigung ist zum Mittelpunkt der Kreisbahn hin gerichtet (Zentripetalbeschleunigung).

Zum Merken:

Eine Beschleunigung kann den Betrag einer *Geschwindigkeit* und / oder die Richtung einer *Geschwindigkeit* ändern.

1.7. Zusammenfassung

Man kann den zurückgelegten Weg zu mehreren Zeitpunkten messen und in einem so genannten Weg-Zeit-Diagramm (vgl. Abb. 5) auftragen. Die Steigung dieser Funktion ist ein Maß für die Änderung des Weges zu diesem Zeitpunkt. Es ist also die Geschwindigkeit.

Die Steigung der Geschwindigkeits-Zeit-Funktion ist ein Maß für die Änderung der Geschwindigkeit, also die momentane Beschleunigung. Dies ist die zweite Ableitung der Weg-Zeit-Funktion, entspricht also der Krümmung dieser Funktion.

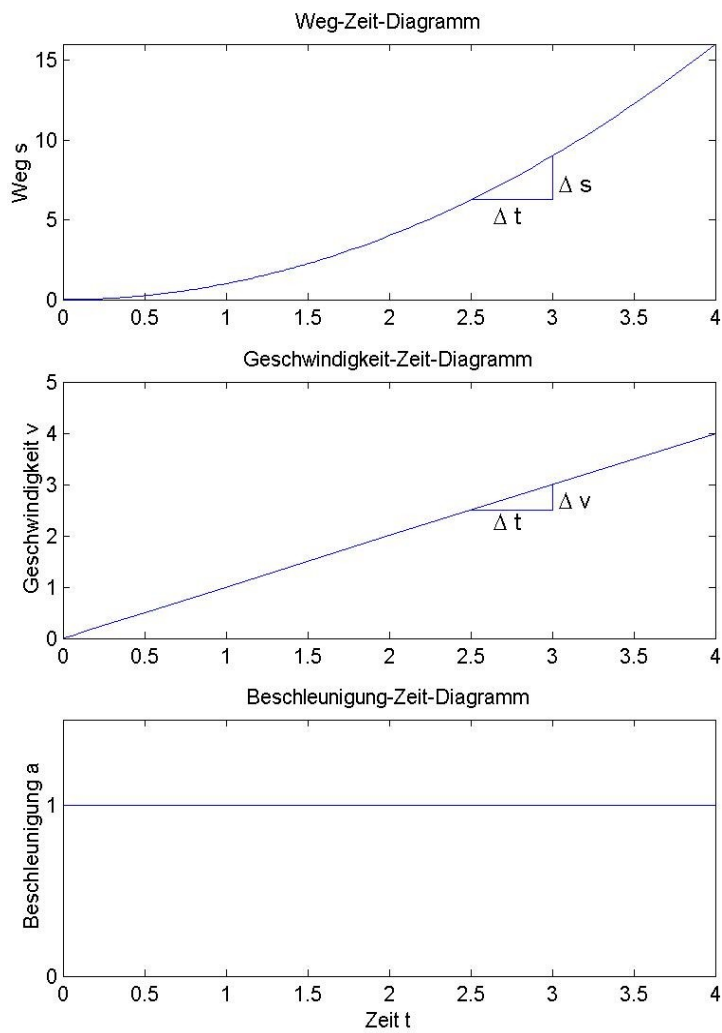


Abb. 5: Zusammengehörige Diagramme.

Analoges gilt für die Winkel, Winkelgeschwindigkeit und Winkelbeschleunigung (siehe Tabelle).

Translation	Weg: Abstand zwischen <u>zwei</u> Punkten.	$s(t)$	m
	Geschwindigkeit: Die Änderung des Weges mit der Zeit.	$v(t) = \frac{ds(t)}{dt}$	$\frac{\text{m}}{\text{sec}}$
	Beschleunigung: Die Änderung der Geschwindigkeit mit der Zeit (Betrag und / oder Richtung).	$a(t) = \frac{dv(t)}{dt}$	$\frac{\text{m}}{\text{sec}^2}$
Rotation	Winkel: Neigung zwischen <u>zwei</u> Achsen.	$\varphi(t)$	Grad
	Winkelgeschwindigkeit: Die Änderung des Winkels mit der Zeit.	$\omega(t) = \frac{d\varphi(t)}{dt}$	$\frac{\text{Grad}}{\text{sec}}$
	Winkelbeschleunigung: Die Änderung der Winkelgeschwindigkeit mit der Zeit.	$\dot{\alpha}(t) = \frac{d\omega(t)}{dt}$	$\frac{\text{Grad}}{\text{sec}^2}$

2. Kinetik / Dynamik

In der Kinetik (oder Dynamik) wird die Wechselwirkung zwischen der Bewegung eines Körpers und den Kräften, die auf ihn wirken untersucht.

Es werden nun auch Kräfte und Momente betrachtet, die dadurch entstehen, dass ein Körper seine Lage und seinen Bewegungszustand ändert. Dies sind neben *Dämpfungs-* und *Reibungskräften* vor allem die *Trägheitskräfte*.

Erstes Newtonsches Gesetz (Trägheitsgesetz)

Ein Körper bleibt im Zustand der Ruhe oder der gleichförmigen Bewegung, solange er nicht durch eine Kraft gezwungen wird, seinen Zustand zu ändern.

Zweites Newtonsches Gesetz

Die Beschleunigung a , die ein Körper erfährt, wenn eine Kraft F darauf einwirkt, ist direkt proportional zur Masse m des Körpers und erfolgt in Richtung der einwirkenden Kraft:

$$\text{Kraft} = \text{Masse} \cdot \text{Beschleunigung}$$

2.1. d'Alembertsches Prinzip

In der Statik wurde an einem Freikörperbild das statische Gleichgewicht der Kräfte betrachtet. An seine Stelle tritt nun das *dynamische Gleichgewicht*. Nach D'ALEMBERT werden die Trägheitskräfte und Trägheitsmomente genau wie die sonstigen Kräfte und Momente behandelt. Dann gilt so wie in der Statik, dass die Summe aller an einem Körper angreifenden Kräfte und Momente im Gleichgewicht sein muss, also Null ergeben muss.

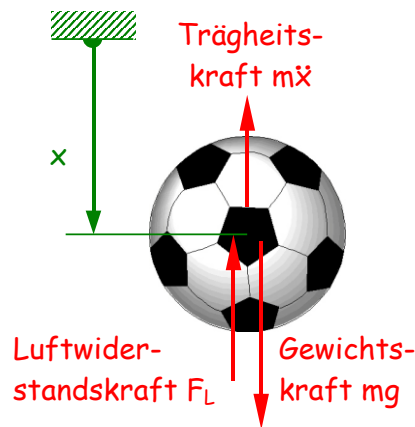
Beispiel: „Fallender Fußball“

Auf einen Fußball im freien Fall wirken die Gewichtskraft, die Trägheitskraft und eine Luftwiderstandskraft.

$$\sum F_{i,x} = 0$$

$$mg - F_L - m\ddot{x} = 0$$

$$\Rightarrow \ddot{x} = g - \frac{F_L}{m}$$



Aus dem Gleichgewicht aller Kräfte in vertikaler Richtung folgt die Beschleunigung $a = \ddot{x}$ des Fußballs, die stets kleiner ist als die Erdbeschleunigung g .

2.2. Energie, Arbeit, Leistung**2.2.1. Energie**

Die **Einheit** der Energie ist ein Joule: $J = N \cdot m$.

Neben der mechanischen Energie gibt es z.B. chemische Energie, Strahlungsenergie, Wärmeenergie. Die mechanische Energie kann man in *kinetische* und *potentielle* Energie unterteilen:

Kinetische Energie: Bewegt sich ein Körper mit der Masse m mit der Geschwindigkeit v , so berechnet sich seine kinetische Energie E_{kin} zu:

$$E_{kin} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$$

Potentielle Energie: tritt als *Lageenergie* oder als *Verformungsenergie* auf. Die Lageenergie eines Körpers mit der Masse m , der sich auf dem Niveau h über einem Referenzniveau $h_0 = 0$ befindet lautet:

$$E_{pot} = m \cdot g \cdot h$$

Wird z.B. eine linear-elastische Feder (Steifigkeit k) mit der Kraft F um die Strecke x verformt, dann beträgt die in ihr gespeicherte Verformungsenergie:

$$E_{pot} = \frac{1}{2} \cdot F \cdot x = \frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2$$

Energieerhaltung, Energieumwandlung, Schwingungen:

Energie kann nicht verloren gehen (erster Hauptsatz der Thermodynamik). Allerdings kann Energie wegtransportiert werden (Strahlung) oder in eine Form umgewandelt werden die man als unbrauchbar empfindet. Bei einer Schwingung (z.B. Pendel) werden die Energieformen kinetische und potentielle Energie laufend ineinander umgewandelt. Diese Umwandlung gelingt jedoch nie vollständig. Ein Teil der Energie wird immer auch in Wärmeenergie umgewandelt (Zweiter Hauptsatz der Thermodynamik) und geht als mechanische Energie verloren. Alle Schwingungen sind gedämpft und kommen ohne äußere Energiezufuhr irgendwann zur Ruhe.

Zum Merken:

Energie bleibt erhalten

2.2.2. Arbeit

Die Arbeit W ist eine Differenz von Energien. Kräfte können mechanische Arbeit verrichten, wenn sich der Kraftangriffspunkt in Richtung der Kraft verschiebt. Bei konstanter Kraft gilt dann:

Zum Merken:

Arbeit = Kraft mal Weg

Beispiele:

- Hubarbeit: Wird ein Körper mit der Gewichtskraft F_G um die Höhe h angehoben, so berechnet sich die Hubarbeit W_{Hub} mit:

$$W_{Hub} = F_G \cdot h$$

- Reibarbeit: Bewegt sich ein Körper entlang einer Strecke s und wirkt dabei die Reibkraft F_R , so berechnet sich die Reibarbeit W_{Reib} mit:

$$W_{Reib} = -F_R \cdot s$$

Bei der Hubarbeit leistet die Kraft Arbeit an dem Körper. Die im Körper gespeicherte Energie nimmt zu. Kraft und Weg besitzen die gleiche Orientierung (nach oben). Die Arbeit ist positiv.

Bei der Reibarbeit dagegen ist die Reibkraft stets so orientiert, dass sie der Bewegung entgegen wirkt. Kraft und Weg besitzen unterschiedliche Vorzeichen. Die Arbeit ist negativ. Dem Körper wird durch die Reibung Energie entzogen.

2.2.3. Leistung

Die Leistung P ist ein Maß dafür, wie viel Arbeit W pro Zeitspanne geleistet wird:

$$P = \frac{W}{t}.$$

Die **Einheit** der Leistung ist das Watt: $W = \frac{J}{s} = \frac{N \cdot m}{s}$.

Zum Merken:

Leistung = Arbeit pro Zeit