Vorlesung Wintersemester 2013/2014:

Numerische Methoden in der Biomechanik

Dr.-Ing. Ulrich Simon

Hinweis auf andere Vorlesungen

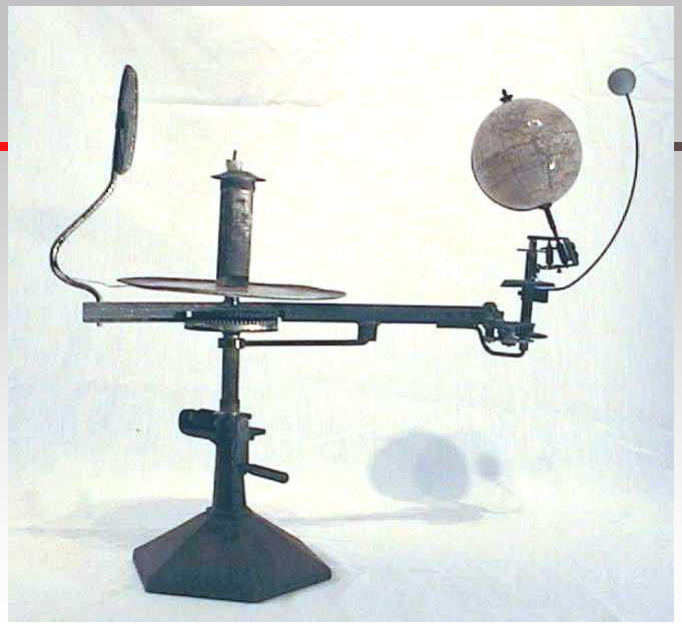
M. Steiner : „Mehrkörperdynamik (MKS) in der Biomechanik“

F. Galbusera: „Beispiele von biomechanischen Finite-Elemente-Methoden (FEM)“

Gliederung

- Einführung / Übersicht / Allgemeines
- Beispiel: Simulation der Frakturheilung
  - Finite-Elemente-Methode (FEM)
  - Fuzzy-Logic
- Einführung FEM
- Einführung MKS
- Hinweise zum Einstieg

Modellbildung



Wissenschaft will …

- Beobachtungen erklären können,
- Vorhersagen treffen können.

⇒ Modelle

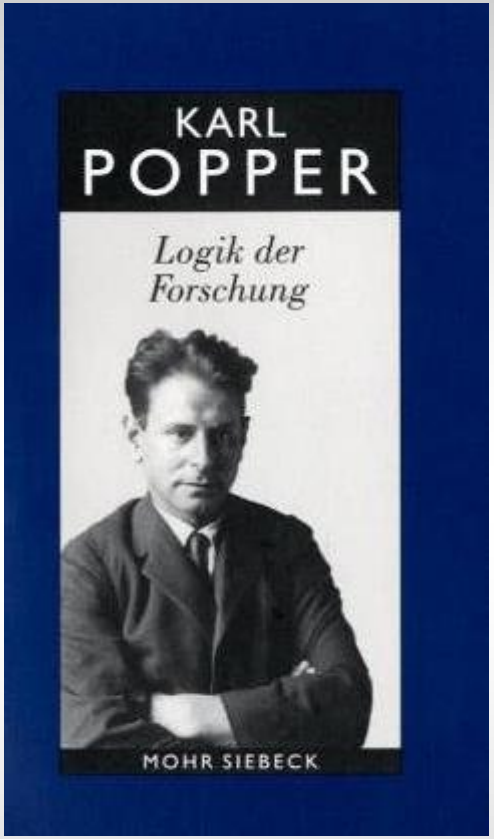
Modelle sind …

- Abbildungen von Systemen / Prozessen in andere begriffliche oder gegenständliche Systeme,
- mehr oder weniger phänomenologisch,
- fragespezifisch,
- immer Näherungen, Vereinfachungen, Idealisierungen
- mit beschränktem Gültigkeitsbereich.
- **das gilt auch für Experimente und klinische Tests!**

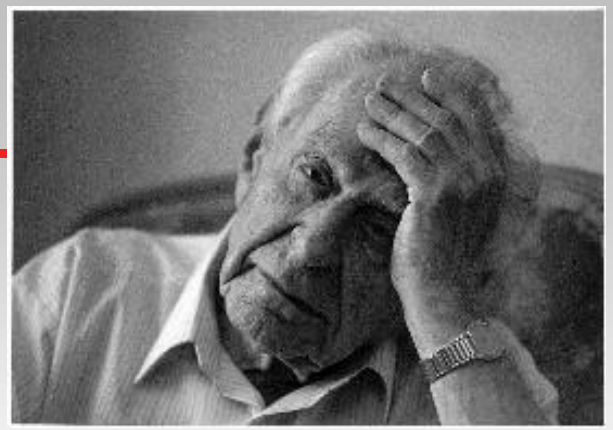
Ein gutes Modell ist …

…so kompliziert wie nötig und so einfach wie möglich!

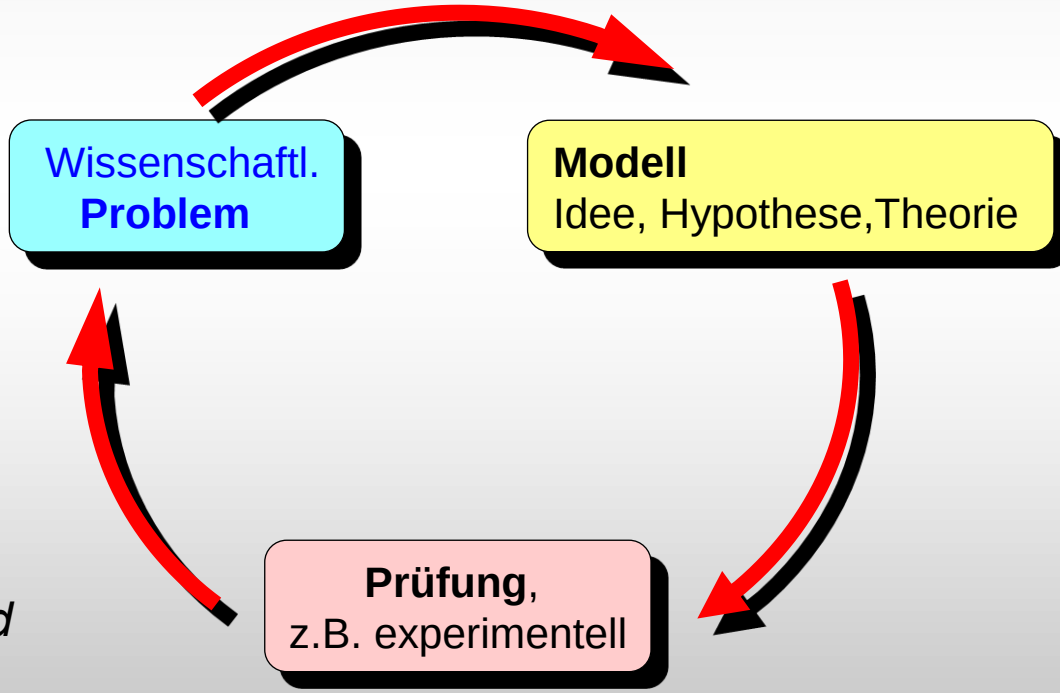
Modellbildung



1934



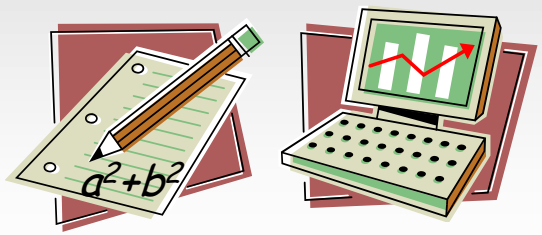
Sir Karl Raimund Popper (1902-1994)



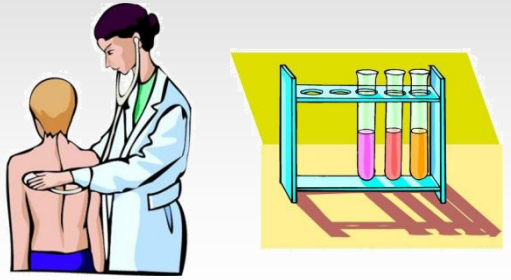
„Wissenschaftliche Aussagen sind immer modellhaft, also vorläufig!“

Theoretische gegenüber experimentellen Methoden

„Theoretisch“
Mathematisch, Computer



„Experimentell“
In Vivo, In Vitro



Eigenschaften theoretischer Methoden

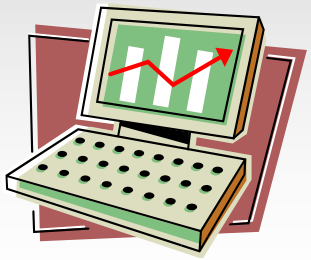
+ Reproduzierbar, eindeutig (determiniert), leicht verfügbar.
+ Parameterstudien durch vielfache Wiederholungen möglich.
+ Modellierung von unerreichbaren oder fiktiven Prozessen möglich.
+ Ethisch unbedenklich
○ Oft stark vereinfacht
– Modellparameter und Validierung erfordern oft zusätzlich Experimente.

Eigenschaften experimenteller Methoden

+ Oft realistischer: „Die Natur vergisst keinen Effekt“.
○ Ohne tiefes Verständnis möglich
– Immer Fehlerbehaftet: Unbekannte Einflüsse, Messfehler
– Aber: Selbst In-vivo-Studien sind stets modellhaft und deren Ergebnisse nur eingeschränkt gültig.

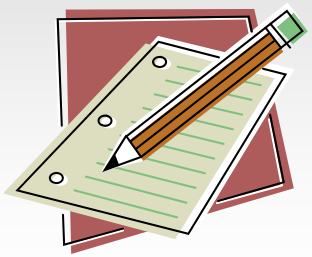
Numerische gegenüber analytischen Methoden

„Numerisch“
⇒ Rechnen mit Zahlenwerten



1.37491

„Analytisch“
⇒ Rechnen mit Variablen



a^2+b^2

Eigenschaften numerischer Methoden

- Oft Nährungsverfahren
- Alle Parameter, Rand- und Anfangsbedingungen werden als Zahlenwerte eingegeben: Lösung gilt nur für diesen speziellen Fall.
- Parametereinflüsse müssen durch vielfache Rechenwiederholungen untersucht werden.
- Für viele komplexe Probleme sind numerische Methoden bekannt.

Eigenschaften analytischer Methoden

- (Mathematisch) exakte Lösung.
- Analytische Gleichungen mit Variablen: allgemeingültige Aussagen für ganze Modellklassen.
- Parametereinflüsse sofort, allgemeingültig (analytisch) zu erkennen.
- Analytische Lösungen sind nur für wenige einfache Probleme bekannt.

Landkarte der numerischen Methoden

Daten charakterisieren und analysieren
Daten = gemessene, physikalische Größen
⇒Statistik: Mitteln, Ausgleichen
⇒Bildverarbeitung
⇒Komprimieren (JPEG)

Signale charakterisieren und analysieren
Signal = gemessene, zeitabhängige Größe (z.B. EMG).
⇒Glätten: Filtern (Hoch-, Tiefpass)
⇒Frequenzanalyse: Fourieranalyse (FFT)
⇒Wavelet-Transformation (JPEG-Kompession)

Festigkeitsanalysen (Randwertproblem)
- Spannungen, Dehnungen, Verformungen
- Hält das Implantat?

⇒Differentialgleichung (Randwertproblem)
⇒Finite-Elemente-Methode (FEM)

Dynamische Prozesse simulieren, steuern, regeln
⇒Differentialgleichungen
⇒Chaostheorie
⇒Fuzzy Logic
⇒Neuronale Netze

Bewegung analysieren
Inverse Dynamik: Bewegung gemessen, Muskelkräfte gesucht.
⇒Lösen unterbestimmter Gleichungssysteme
⇒Optimierung

Bewegung beschreiben
Kinematik: Bewegung gemessen, Beschreibung gesucht.
⇒Euler-, Kardanwinkel
⇒Helikale Achsen

Bewegung simulieren (Anfangswertproblem)
(Vorwärts-)Dynamik: Kräfte gegeben, Bewegung gesucht.
⇒Differentialgl. (Anfangswertproblem)
⇒Mehr-Körper-Simulation (MKS)
⇒Explizite FEM (Crashsimulation)

Parameteridentifikation
- Ein- und Ausgang gegeben, System(-parameter) gesucht

⇒Kleinste Fehlerquadrat-Summe

Numerische Methoden allgemein

Lineare und nichtlineare Gleichungssysteme
- Gaußscher Algorithmus (für lineare Gleichungssysteme)
- Spezielle Algorithmen (symmetrische Systeme, Bandstruktur, positiv definite Systeme)
- Newton-Verfahren (für nichtlineare Gleichungssysteme)

Optimierungs- oder Ausgleichsprobleme
- Kleinste Fehlerquadrate (least squares)
- z.B. Inverse Dynamik und Berechnung der Muskelkräfte beim Gang

Eigenwertprobleme
- meist dynamische (periodische) Probleme
- z.B. Berechnung von Eigenfrequenzen

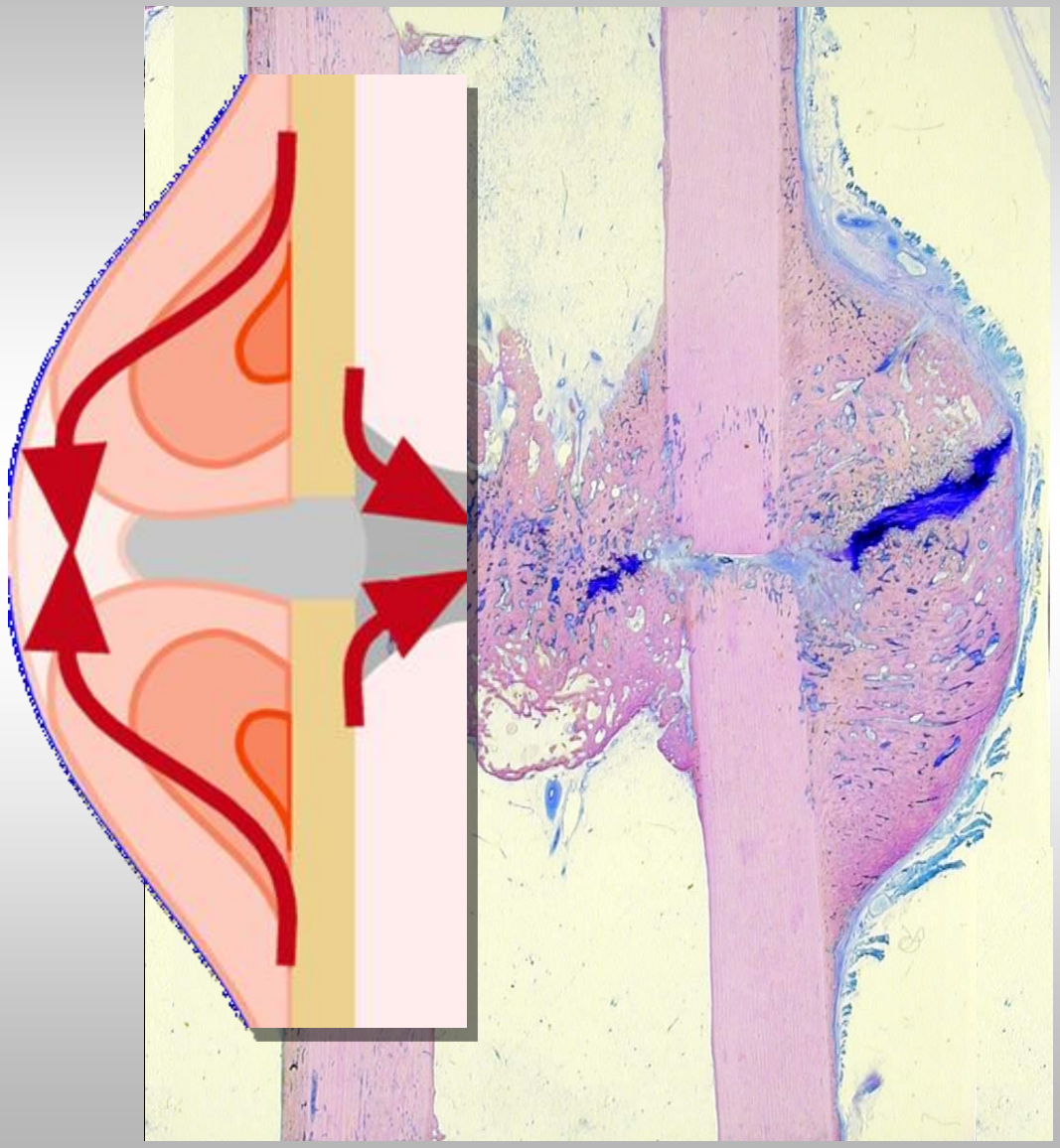
Anfangswertprobleme
- meist dynamische (transiente) Probleme
- numerische Integration (Runge-Kutta-Verfahren)
- Mehr-Körper-Simulation (MKS)

Randwertprobleme
- oft statische Probleme (z.B. Festigkeitsanalysen)
- Finite-Elemente-Methode (FEM)

Einheitensysteme

Basiseinheiten			***Abgeleitete Einheiten***					***Bemerkung***
Länge	*Masse*	*Zeit*	*Kraft* = *Masse*Länge/Zeit²*	*Spannung* = *Kraft/Länge²*	*Dichte* = …	*Beschl.* = …	…	
m	kg	sec	N	Pa	kg/m^3	m/sec^2		SI-Basis-Einheiten
mm	t	sec	N	MPa	t/mm^3	mm/sec^2		Organ-Level
µm	t	sec	mN	GPa				Tissue-Level

Beispiel: „Simulation der Frakturheilung“



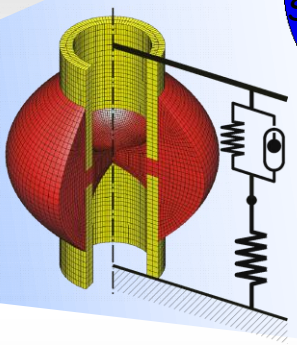
Simulation der Knochenheilung

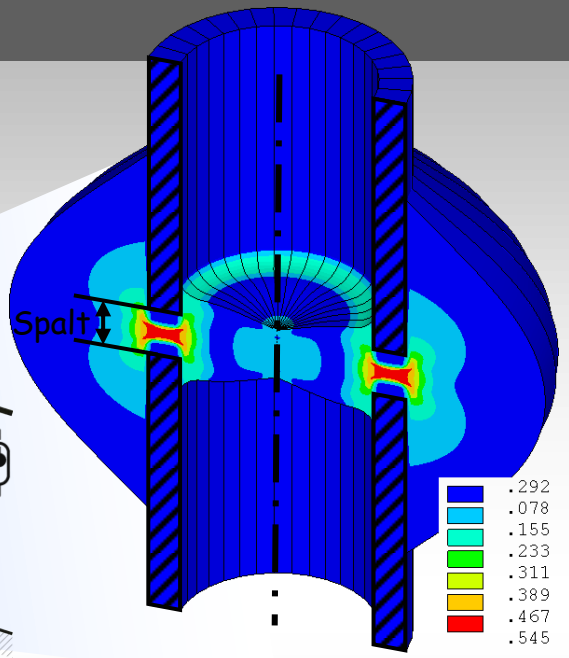
Anfangszustand
Geometrie, Last, Anfangswerte

FE Analyse
Gewebedehnungen

Fuzzy Logic
Gewebeumbau, Vaskularisierung

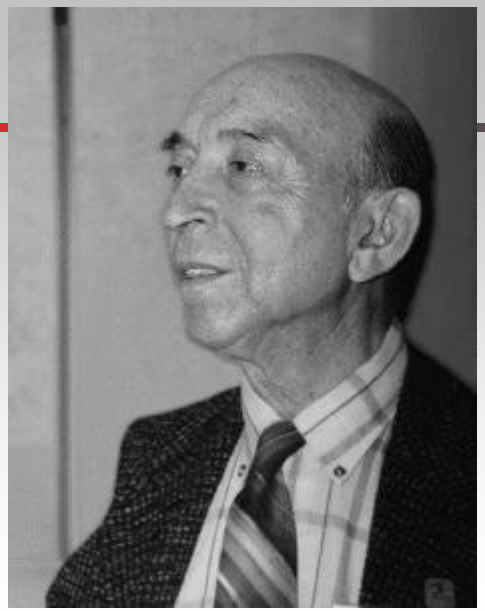
Ergebnisse
Simulation des Heilungsprozesses





Fuzzy-Regeln zu ...
- Desmale Ossifikation
- Chondrogenese
- Kalzifikation
- Enchondrale Ossifikation
- Gewebezerstörung
- Revaskularisierung

Fuzzy Logic: Allgemeines



L.A. Zadeh

Ursprung:

- Lotfi A. Zadeh, Berkeley (1965): „Fuzzy Sets“

Prinzip:

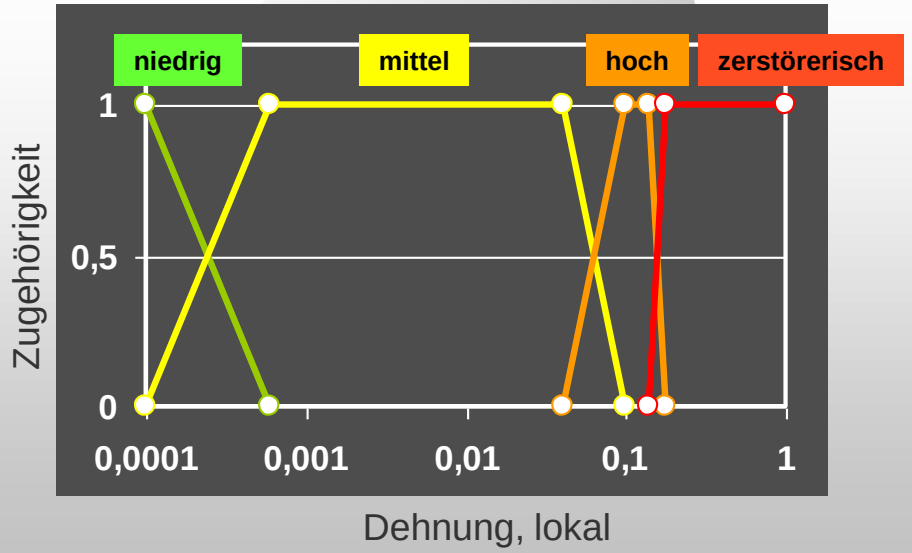
- Fuzzy Logic = „Krause Logik“ im Gegensatz zur scharfen Logik
- *MEHR-ODER-WENIGER* statt *ENTWEDER-ODER*

Einsatzgebiete:

- Regelungstechnik (komplexe Mehrvariablen-Regelung)
- Industrieautomation und Konsumgüter
- Sensorik, Datenanalyse, Betriebs- und Finanzwirtschaft

Fuzzy-Regler

Fuzzyfizierung:



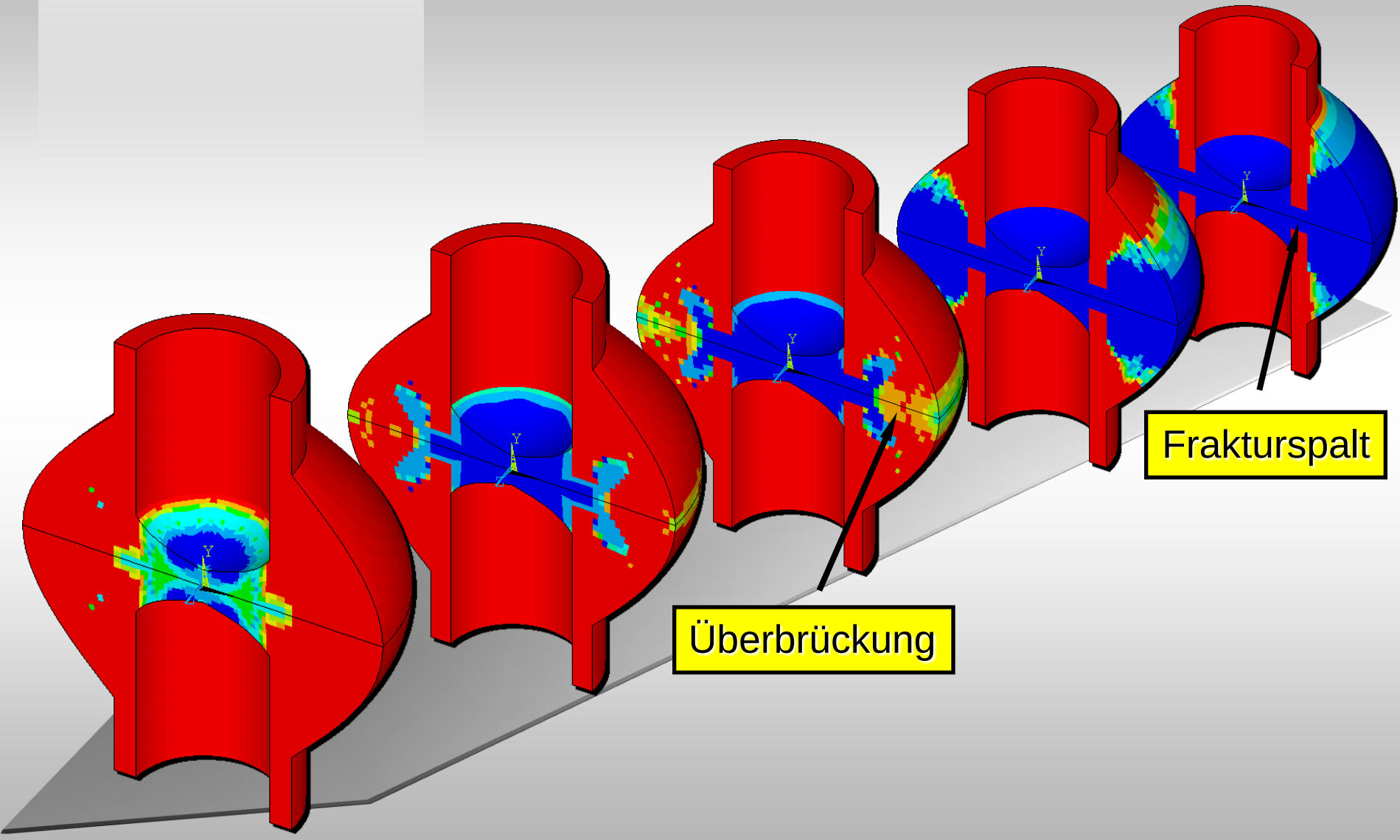
Fuzzy-Regeln:

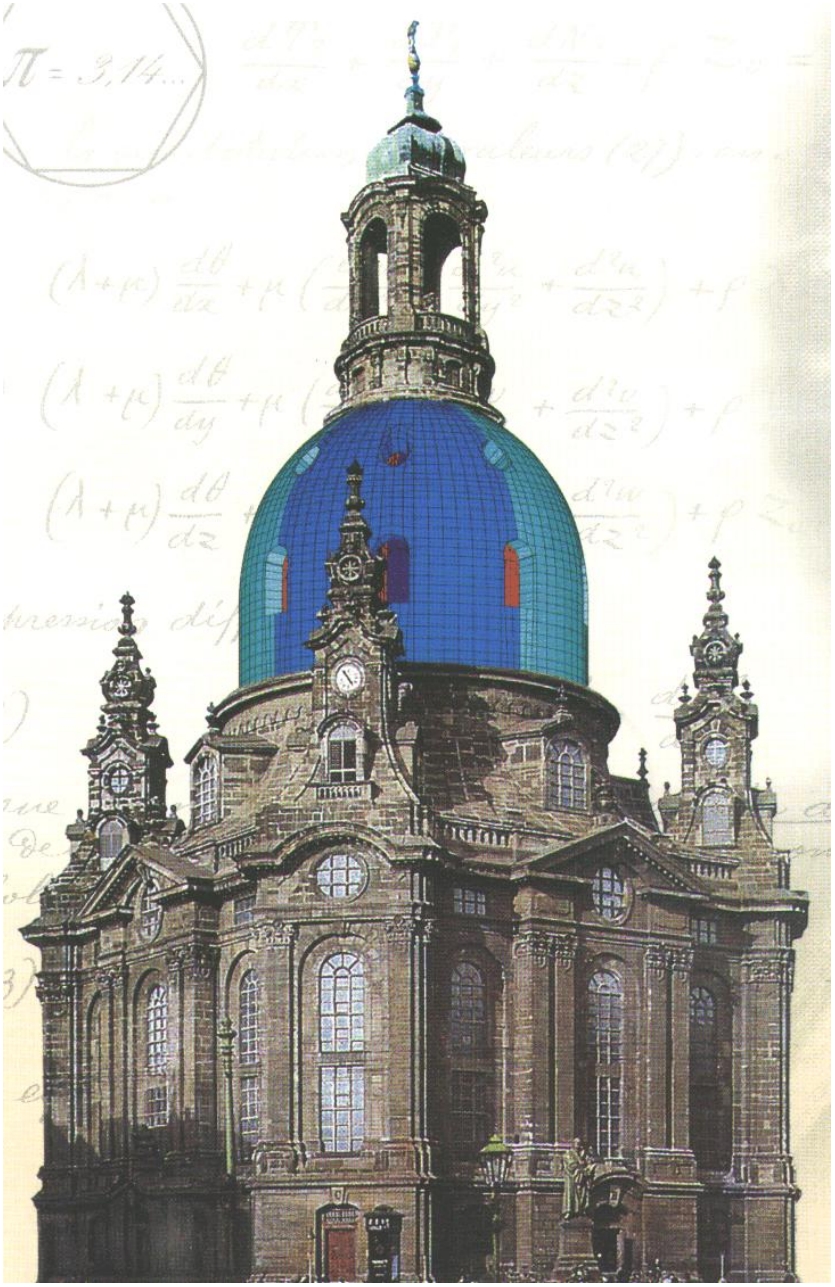
Wenn …
Durchblutung = gut
und
Dehnung = mittel,

dann …
Knochenanteil = erhöhen.

DGfB

Ergebnis: Knochenneubildung





Statik, Festigkeit

Wie stark Verformt es sich?
Hält es?

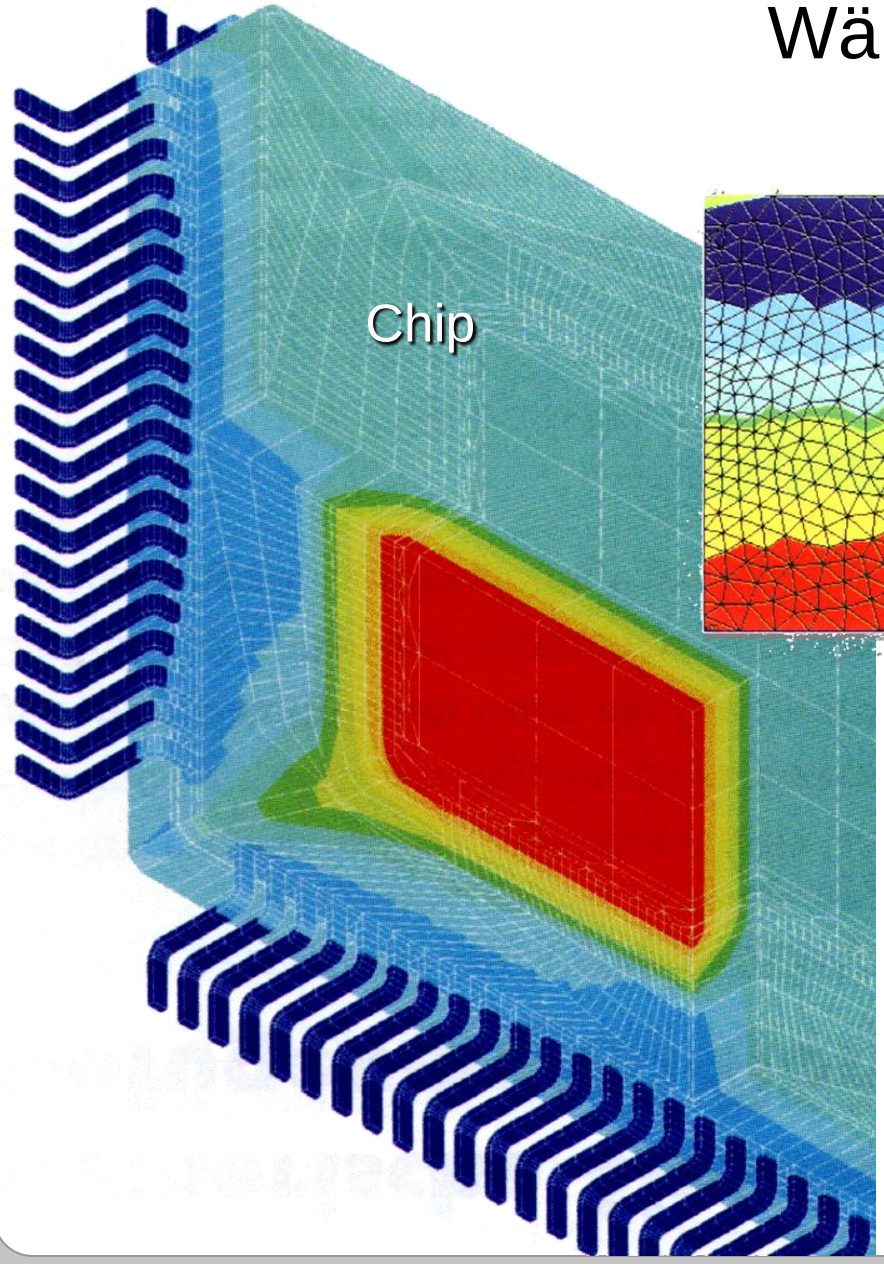
- Verschiebungen
- Spannungen, Dehnungen

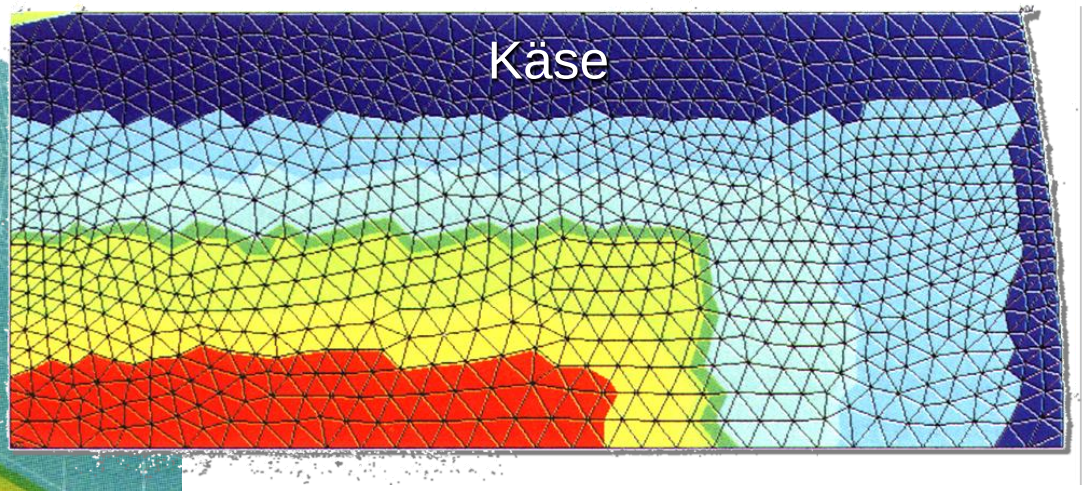
Nichtlinear:

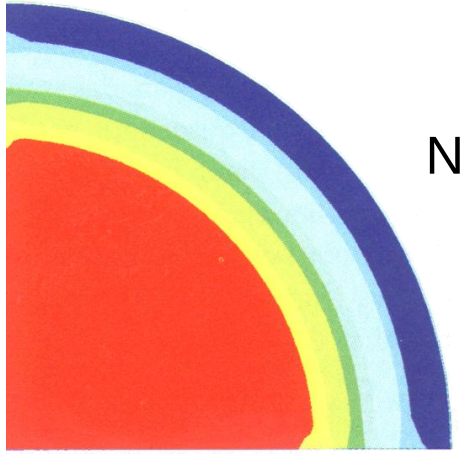
- Kontakt, Reibung
- Plastizität, Verfestigung
- Ermüdung, Bruchmechanik

Frauenkirche, Dresden

Wärmeleitung und Diffusion

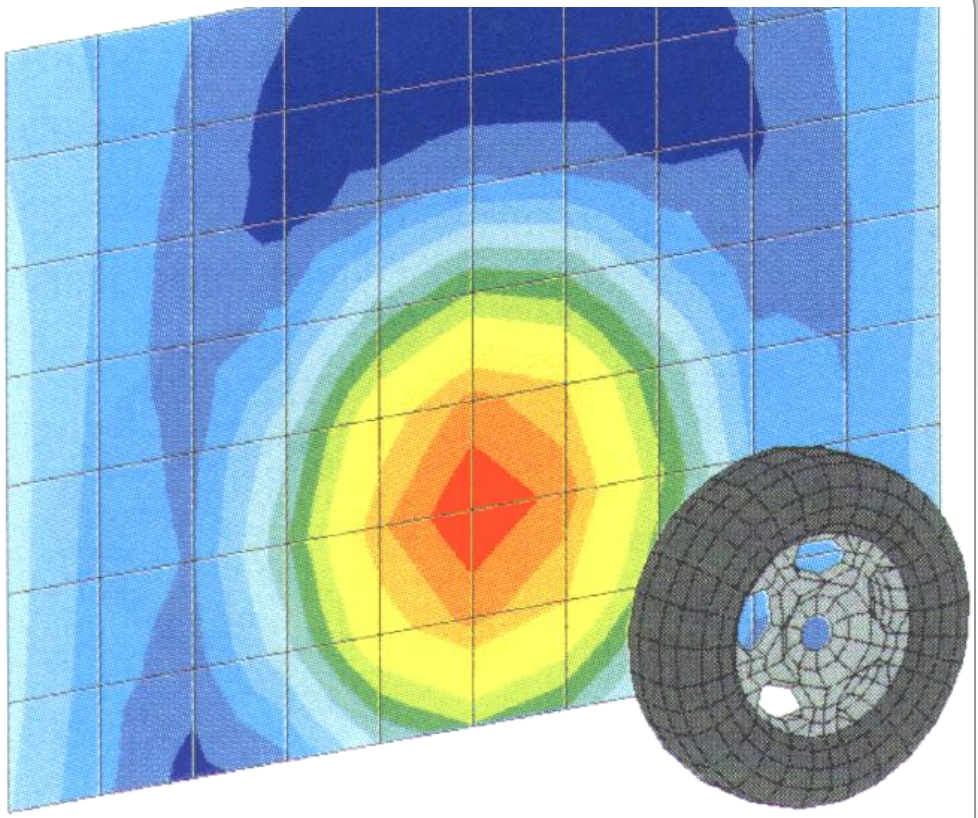






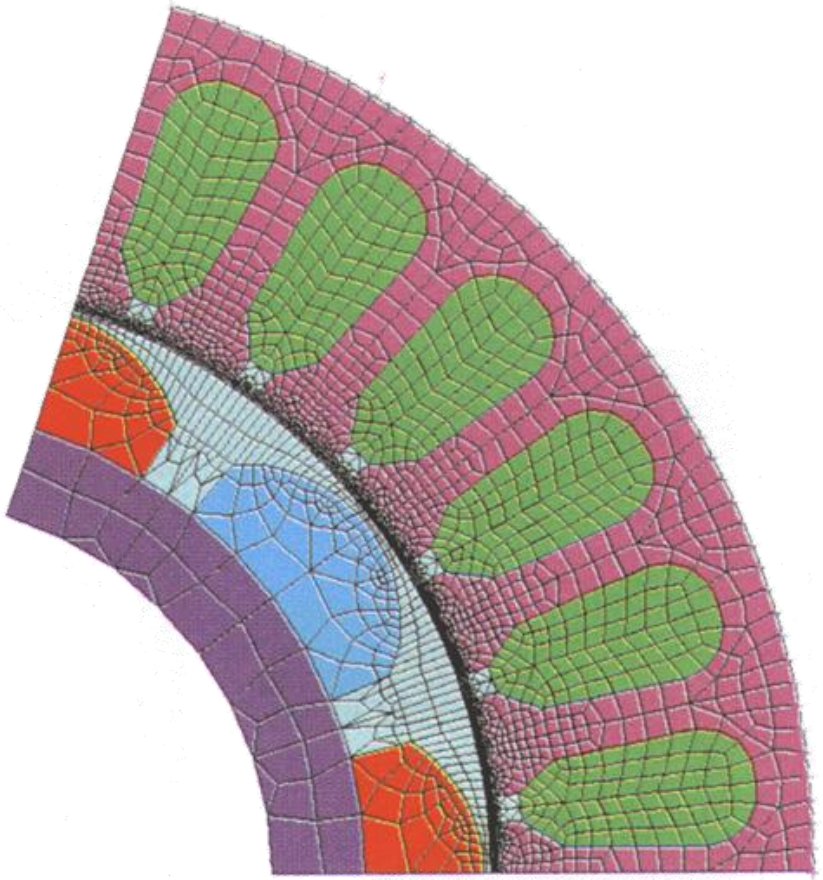
Nudel

Strömungen



Akustik

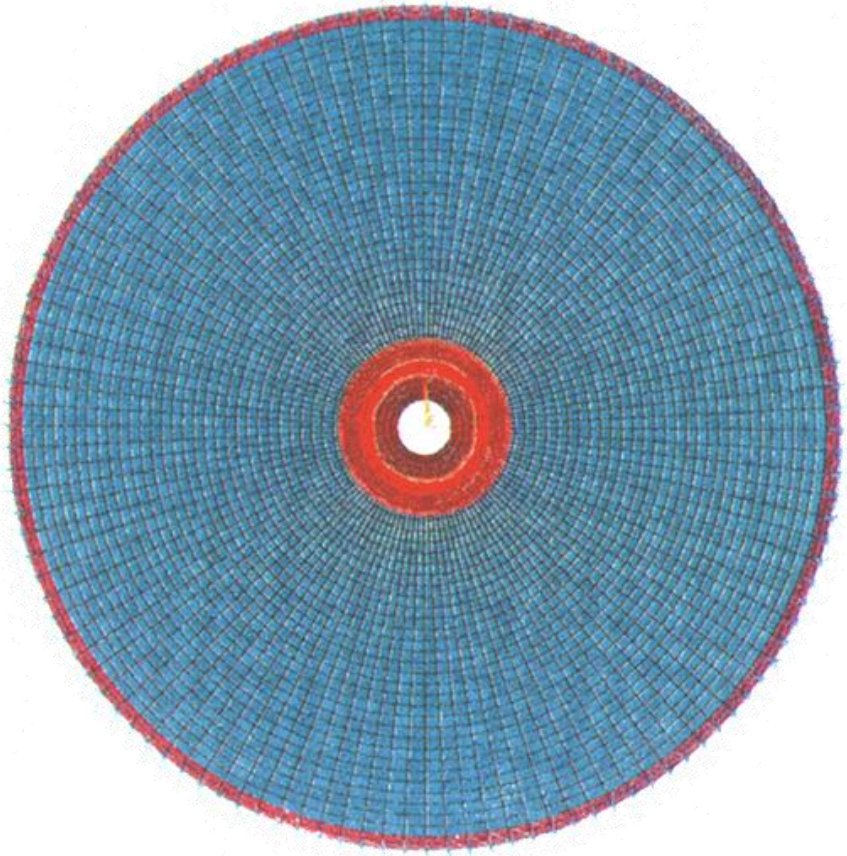
Elektromagnetische Felder

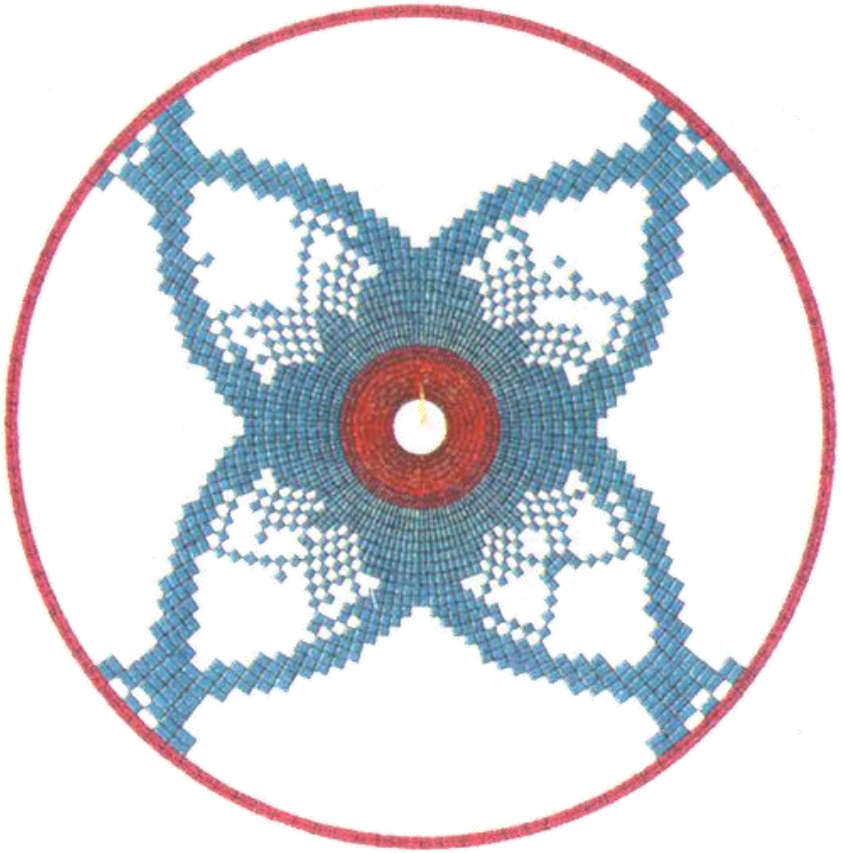


Modell: Elektromotor

Lösung: Feldlinien

Gestaltoptimierung



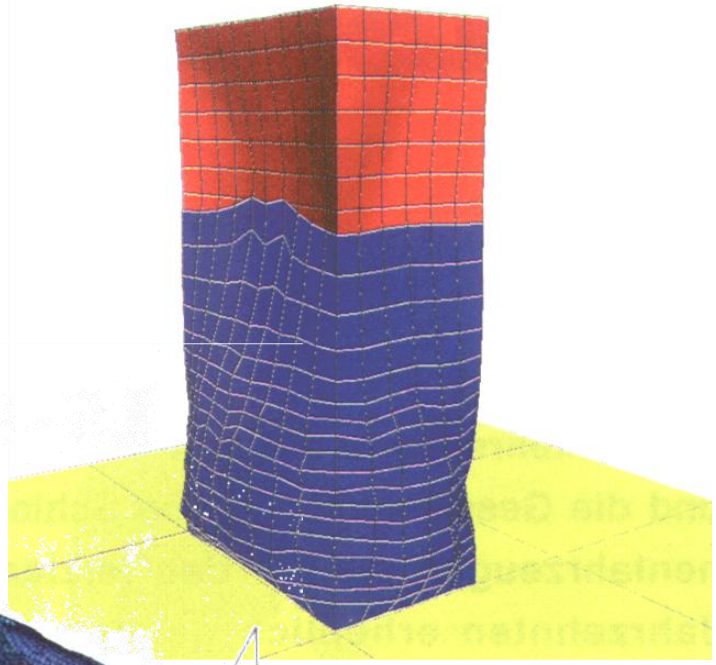


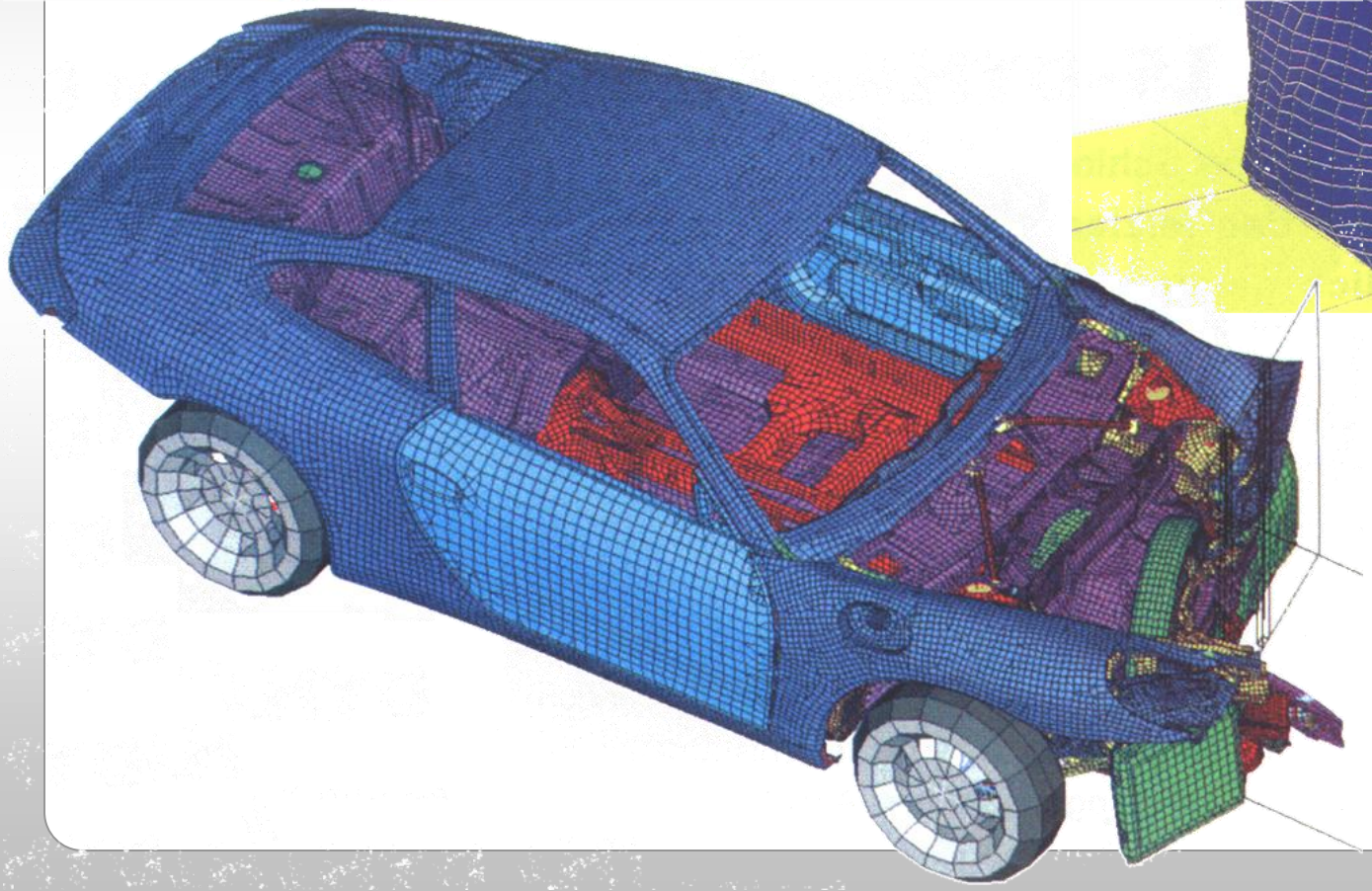
Anfangszustand: Vollscheibe

Endzustand: Speichen

Explizite Dynamik

z.B. Stoßvorgänge





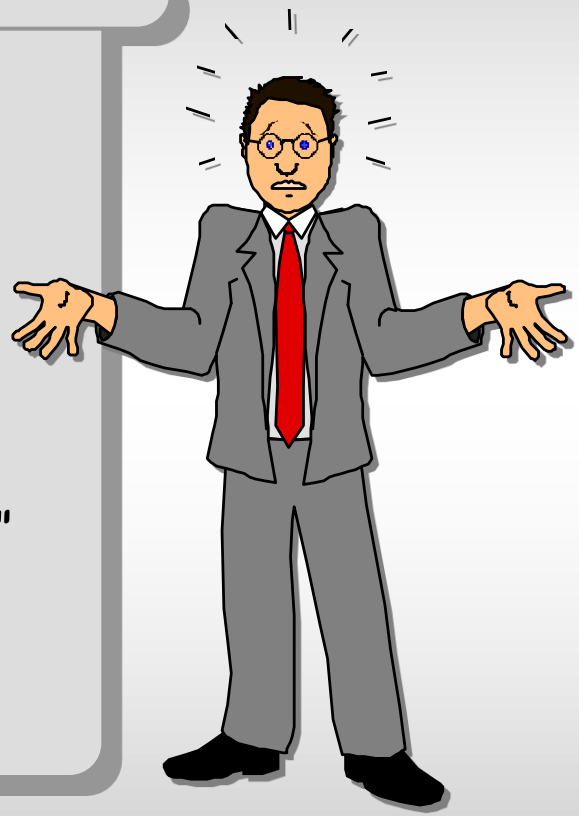
Einführung in die Theorie der FEM

FEM: Erklärung in einem Satz

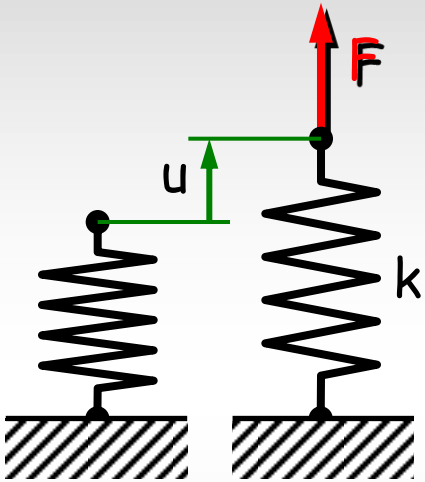
Finite-Elemente-Methode

=

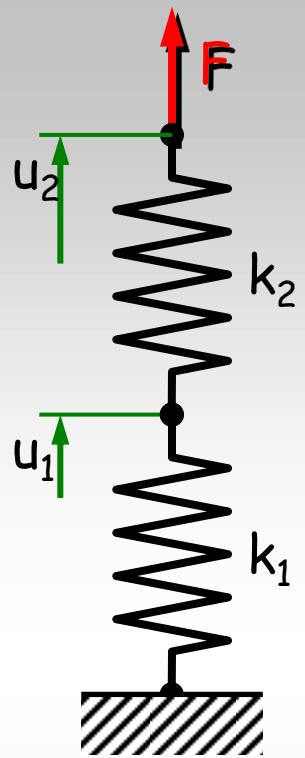
„Numerisches Verfahren zur näherungsweisen Lösung von partiellen Differentialgleichungen"



FEM: Erklärung auf einer Folie



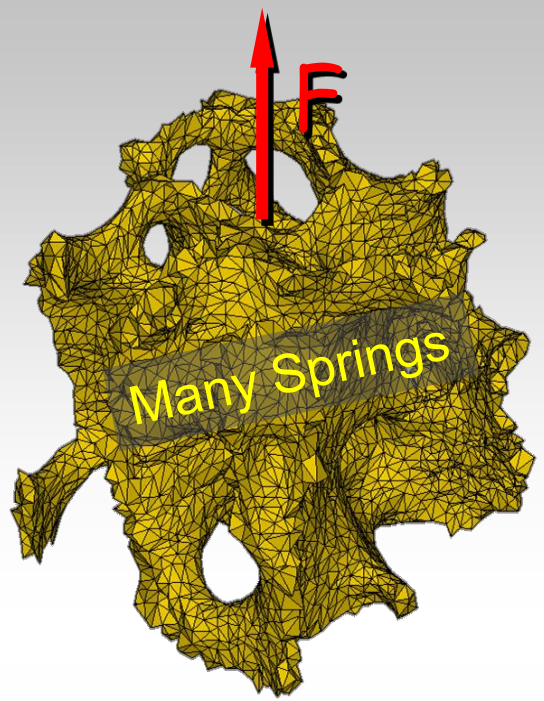
$$k \cdot u = F$$



$$k_1 u_1 = k_2 (u_2 - u_1)$$

$$k_2 (u_2 - u_1) = F$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{K}}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}}_{\underline{u}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ F \end{bmatrix}}_{\underline{F}}$$



FE-Software

$$\underline{\underline{K}} \cdot \underline{u} = \underline{F}$$

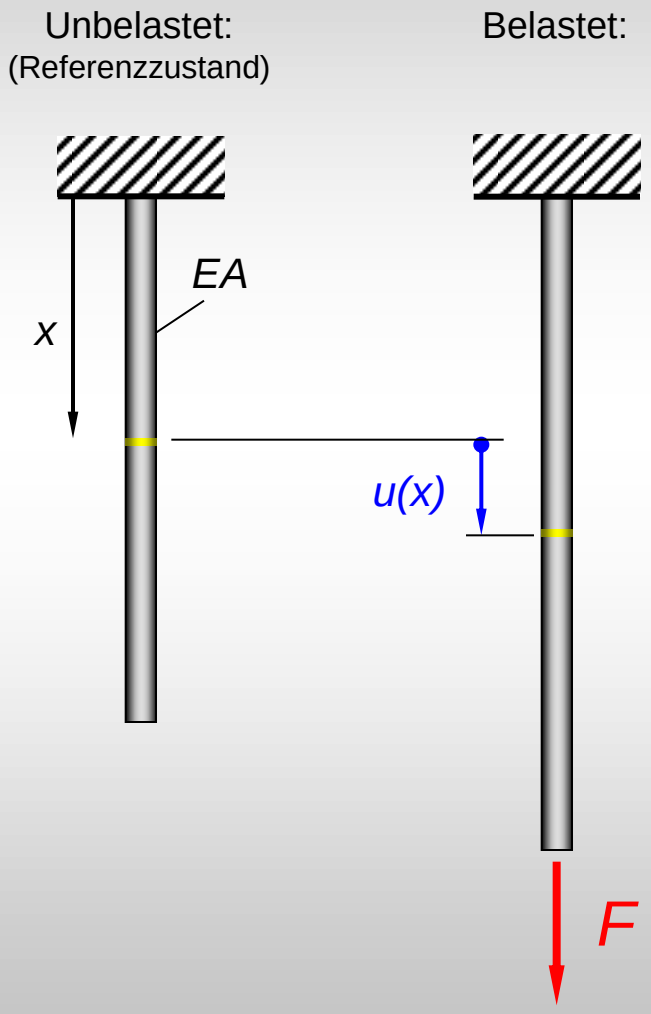
FE-Software

$$\underline{u} = \ldots$$

FEM: Erklärung in 20 Minuten am supereinfachen Beispiel

U. Simon, UZWR, Uni Ulm

Beispiel: Dehnstab mit Endlast



Gegeben:

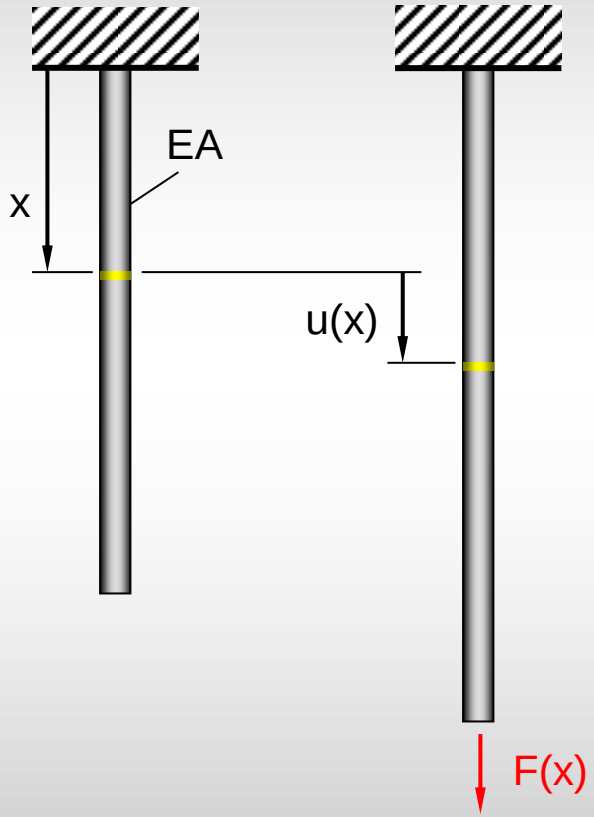
Dehnstab mit …

- Länge L,
- Querschnitt A (konstant),
- E-Modul E (Material homogen u. konstant),
- Länge L und
- Endlast F (axial),
- oben fest eingespannt.

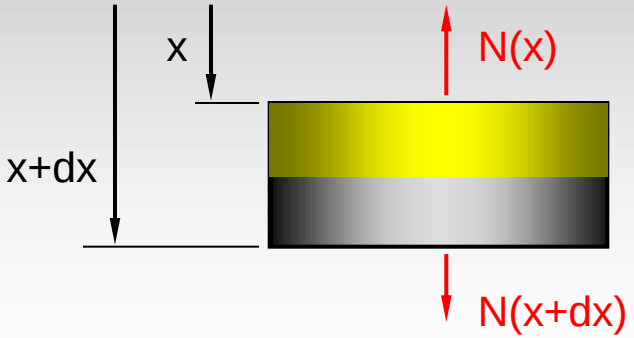
Gesucht:

- **Verschiebungsfunktion** $u(x)$
- Dehnungen $\varepsilon(x)$
- Spannungen $\sigma(x)$

A) Klassische Lösung (Methode der „infiniten“ Elemente)



Differentielles Element (infinitesimale Höhe dx)



Aufstellen der Differentialgleichung

1. Kinematik: $\varepsilon = u'$
2. Werkstoff: $\sigma = E\varepsilon \Rightarrow N = EAu'$
3. Gleichgewicht: $N' = 0$

$\Rightarrow$ DGl: $(EA\,u')' = 0$

Annahme: EA = const

$u'' = 0$

A) Klassische Lösung (Methode der „infiniten“ Elemente)

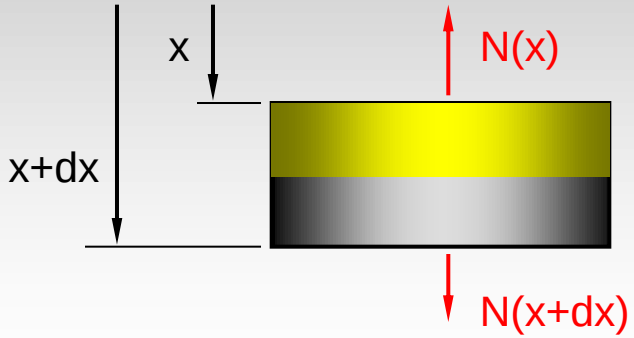
Lösen der Differentialgleichung

$$u''(x) = 0$$

2 mal integrieren:

$$u'(x) = C_1$$

$$u(x) = C_1 * x + C_2$$



Anpassen an Randbedingungen

Oben (Einspannung): $u(0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0$

Unten (Kraft): $N(L) = F \Rightarrow u'(L) = F/(EA)$

$$\Rightarrow C_1 = F/EA$$

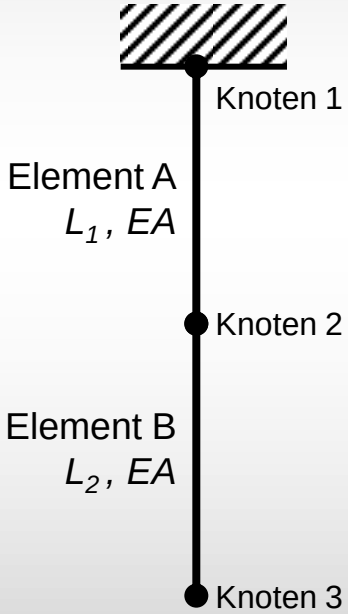
Angepasste Lösung

$$\mathbf{u(x) = (F/EA)*x}$$

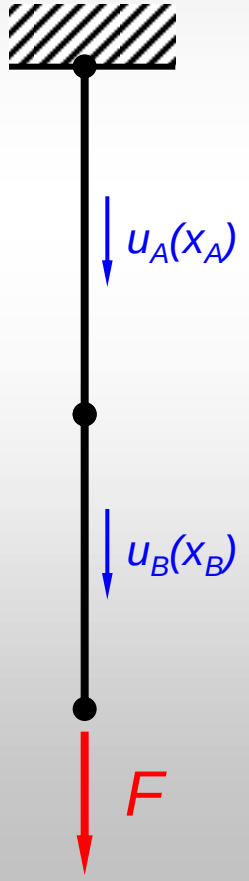
B) Lösung mit FEM (Methode der finiten Elemente)

Diskretisierung: Wir teilen das Gebiet in (nur) zwei finite (= endliche, nicht differentiell kleine) Elemente ein. Die Elemente sind an den Knoten verbunden.

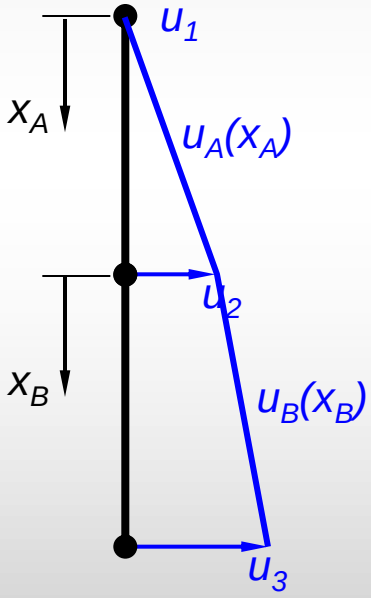
Unbelastet:
(Referenzzustand)



Belastet:
(Zustand mit Verschiebungen u)



Ansatzfunktionen (lineare) für die gesuchten Verschiebungen u.



Das gesuchte Verschiebungsfeld wird elementweise mit einfachen (linearen) **Ansatzfunktionen** beschrieben (siehe Bild). Das ist die Grundidee der FEM. Achtung: Die Verschiebungen *u* sind hier natürlich axial gerichtet, auch wenn es in den Ansatzfunktionen anders erscheint.

$$u_A(x_A) = \hat{u}_1 + (\hat{u}_2 - \hat{u}_1)\frac{x_A}{L_A} \quad = \hat{u}_1\left(1 - \frac{x_A}{L_A}\right) + \hat{u}_2\frac{x_A}{L_A}$$

$$u_B(x_B) = \hat{u}_2 + (\hat{u}_3 - \hat{u}_2)\frac{x_B}{L_B} \quad = \hat{u}_2\left(1 - \frac{x_B}{L_B}\right) + \hat{u}_3\frac{x_B}{L_B}$$

Es gibt jetzt als Unbekannte nur noch die drei „Knotenverschiebungen“ $\hat{u}_1, \hat{u}_2, \hat{u}_3$ und keine ganze Funktion $u(x)$ mehr. Nun führen wir so genannte **„virtuelle Verschiebungen“ (VV)** ein. Das sind zusätzliche, gedachte, beliebige Verschiebungen $\delta\hat{u}_1, \delta\hat{u}_2, \delta\hat{u}_3$. Anschaulich: wir „wackeln“ ein bisschen an den Knoten.

Nun gilt das **Prinzip der virtuellen Verschiebungen (PVV)**: Ein mechanisches System ist im Gleichgewicht, wenn die Gesamtarbeit (also elastische minus äußere Arbeit) auf Grund der virtuellen Verschiebungen (VV) gerade verschwindet.

$$\delta W = 0 \quad \Rightarrow \quad \delta W_{el} - \delta W_a = 0$$

Für unser einfaches Beispiel gilt:

Virt. elastische Arbeit = Normalkraft N mal VV

Virt. äußere Arbeit = äußere Kraft F mal VV

und die Normalkraft wiederum kann durch Ausdrücke EA/L mal Verschiebungsdifferenz ersetzt werden:

$$\delta W = N_A(\delta\hat{u}_2 - \delta\hat{u}_1) + N_B(\delta\hat{u}_3 - \delta\hat{u}_2) - F\delta\hat{u}_3$$

$$= \frac{EA}{L_A}(\hat{u}_2 - \hat{u}_1)(\delta\hat{u}_2 - \delta\hat{u}_1) + \frac{EA}{L_B}(\hat{u}_3 - \hat{u}_2)(\delta\hat{u}_3 - \delta\hat{u}_2) - F\delta\hat{u}_3$$

$$\delta W = \delta\hat{u}_1\left(+\frac{EA}{L_A}\hat{u}_1 - \frac{EA}{L_A}\hat{u}_2\right)$$

$$+ \delta\hat{u}_2\left(-\frac{EA}{L_A}\hat{u}_1 + \frac{EA}{L_A}\hat{u}_2 + \frac{EA}{L_B}\hat{u}_2 - \frac{EA}{L_B}\hat{u}_3\right)$$

$$+ \delta\hat{u}_3\left(-\frac{EA}{L_B}\hat{u}_2 + \frac{EA}{L_B}\hat{u}_3 - F\right) = 0$$

Wir haben mit diesem Prinzip aber leider nur eine Gleichung für die drei unbekannten Knotenverschiebungen $\hat{u}_1, \hat{u}_2, \hat{u}_3$. Schade! Aber da gibt es einen Trick …

Abgekürzt schreiben wir:

$$\delta\hat{u}_1(...)_1 + \delta\hat{u}_2(...)_2 + \delta\hat{u}_3(...)_3 = 0$$

Die virtuellen Verschiebungen können unabhängig von einander gewählt werden. Also z. B. alle außer einer einzigen gleich Null. Dann muss die eine Klammer, bei der wir die VV nicht Null hatten gleich Null sein, damit die Gleichung gelten kann. Weil wir aber die VV wählen können wie wir wollen und auch eine andere VV ungleich Null hätten wählen dürften, müssen alle drei Klammern einzeln gleich Null sein, damit die Gleichung oben dennoch immer erfüllt ist. Wir bekommen drei Gleichungen. Juhu!

$$(...)_1 = 0; \quad (...)_2 = 0; \quad (...)_3 = 0$$

… die wir auch in Matrizenform hinschreiben können:

$$\begin{bmatrix} \frac{EA}{L_1} & -\frac{EA}{L_1} & 0 \\ -\frac{EA}{L_1} & \frac{EA}{L_1}+\frac{EA}{L_2} & -\frac{EA}{L_2} \\ 0 & -\frac{EA}{L_2} & \frac{EA}{L_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \\ \hat{u}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ F \end{bmatrix}$$

oder kurz:

$$\underline{\underline{K}}\,\underline{\hat{u}} = \underline{F}$$

$\underline{K}$ - Gesamtsystem-Steifigkeitsmatrix

$\underline{\hat{u}}$ - Vektor der unbekannten Knotenverschiebungen

$\underline{F}$ - Vektor der Knotenkräfte

Dieses ist das klassische Grundproblem einer strukturmechanischen, linearen FE-Analyse. Ein **lineares Gleichungssystem** für die unbekannten Knotenverschiebungen

Wir müssen noch die **Randbedingungen** berücksichtigen. Der Stab ist am oberen Ende fest eingespannt. Knoten 1 kann sich nicht verschieben:

$$\hat{u}_1 = 0$$

Damit können wir die erste Zeile im Gleichungssystem streichen, denn dies ist ja nun gar keine Unbekannte mehr. Die erste Spalte können wir auch streichen, denn diese Elemente würden ja ohnehin mit einer Null multipliziert werden. Es bleibt also …

$$\begin{bmatrix} \frac{EA}{L_1}+\frac{EA}{L_2} & -\frac{EA}{L_2} \\ -\frac{EA}{L_2} & \frac{EA}{L_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{u}_2 \\ \hat{u}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ F \end{bmatrix}$$

Wir **lösen das Gleichungssystem** und erhalten die Knotenverschiebungen

$$\hat{u}_2 = \frac{L_A}{EA} F \quad \text{und} \quad \hat{u}_3 = \frac{L_A + L_B}{EA} F$$

Hier entspricht die FE-Lösung exakt der (bekannten!) analytischen Lösung (vgl. Teil A). Das ist bei komplizierteren Fällen in der Regel nicht mehr der Fall. Gewöhnlich gilt dann, dass die numerische Lösung sich mit zunehmender Anzahl von finiten Elementen immer besser an die exakte Lösung annähert. Bei richtig komplizierten Problemen gibt es gar keine analytische Lösung mehr; für solche Fälle braucht man ja die FEM!
Aus den Knotenverschiebungen kann man in einer Nachlaufrechnung durch differenzieren die Dehnungen und mit bekanntem Werkstoff auch die Spannungen bestimmen.

$$\varepsilon_A(x_A) = \frac{\hat{u}_2 - \hat{u}_1}{L_A}$$

$$\varepsilon_B(x_B) = \frac{\hat{u}_3 - \hat{u}_2}{L_B}$$

Dehnungen

Fertig!

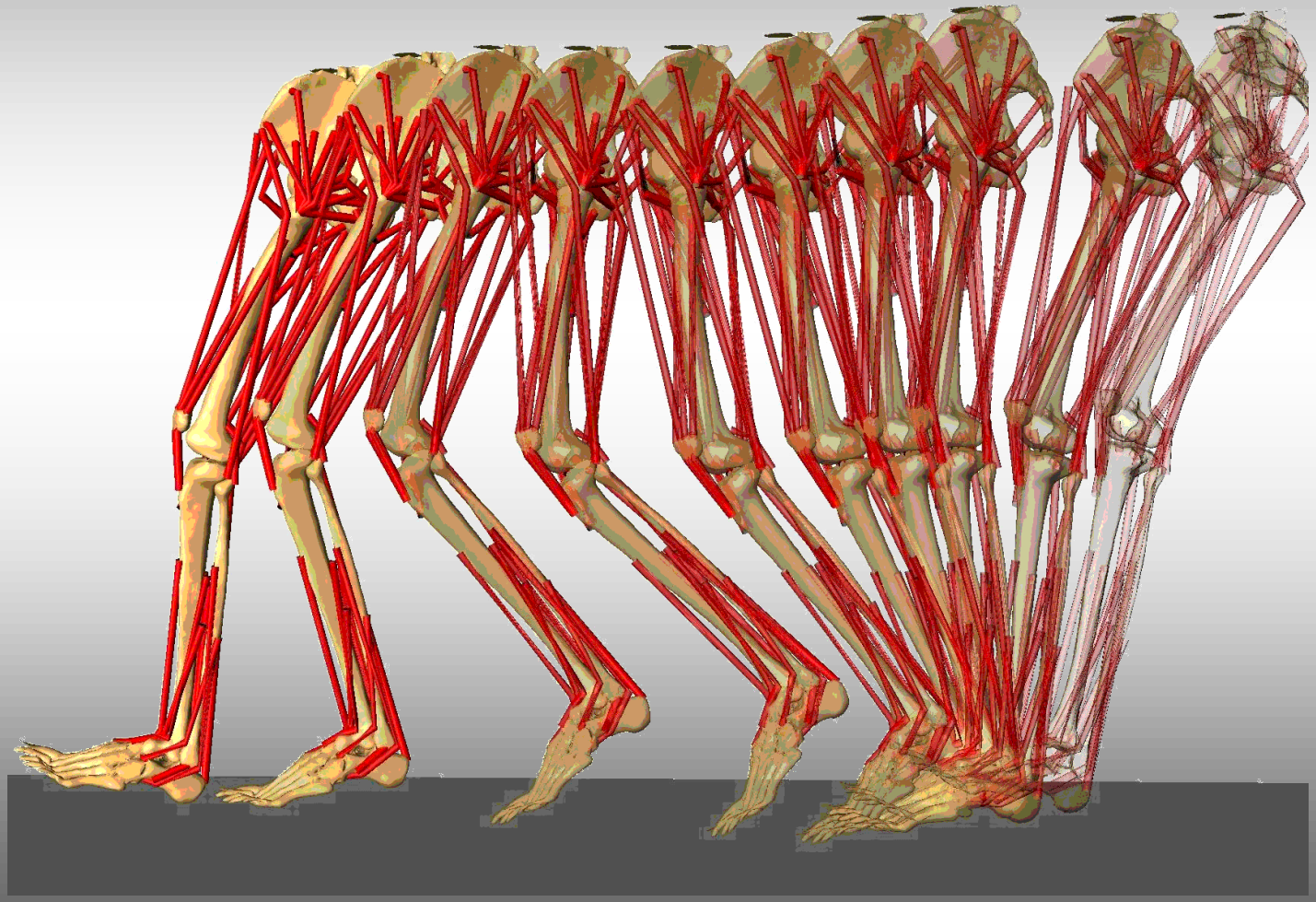
Zusammenfassung

Die **wesentlichen Schritte** und Ideen der FEM sind also:

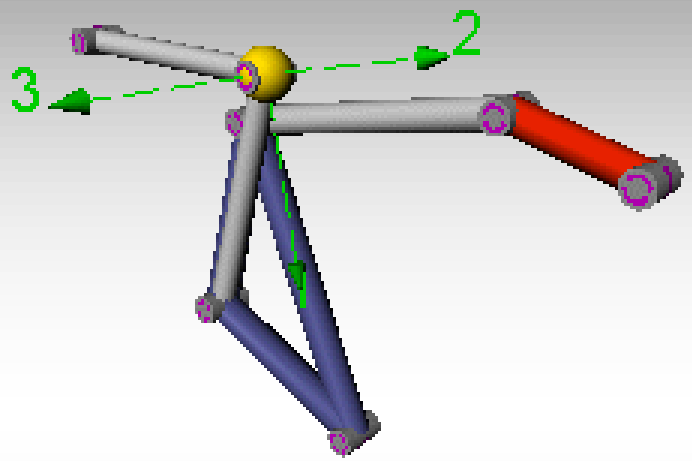
- Diskretisierung: Einteilung des Gebiets in finite Elemente
- Einfache Ansatzfunktionen (Polynome) für die gesuchte Größe innerhalb der Elemente wählen. Man reduziert das Problem auf endlich viele Unbekannte.
- Mechanisches Prinzip (hier PVV) anschreiben und
- daraus Gleichungssystem für unbekannte Knotengrößen ableiten
- Gleichungssystem lösen

Viele dieser Schritte werden bei der Benutzung eines kommerziellen FE-Programms nicht mehr sichtbar. Mit der Wahl einer Analyseart und eines Elementtyps hat man die Ansatzfunktionen implizit bereits gewählt. Das mechanische Prinzip wird lediglich bei der Entwicklung des Programmcodes selbst benutzt um einen programmierbaren Algorithmus für den Aufbau des Gesamt-Gleichungssystems zu entwickeln. Während der Nutzer das FE-Programm benutzt, wird kein PVV oder ähnliches ausgeführt

Mehrkörper-Systeme (MKS) in der Biomechanik



Mehrkörpersysteme (MKS):



Quelle: IFM, TU Chemnitz, alaska

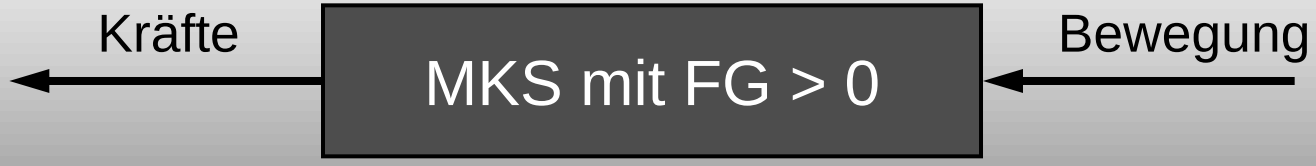
- Starrkörpern (mit Massen, Massenmomenten)
- Gelenken (Bindungen)
- FG Gesamtsystem = Anzahl Körper x 6 – Anzahl Bindungen

VERGLEICH: Vorwärts-Dynamik / Inverse Dynamik

Vorwärts-Dynamik

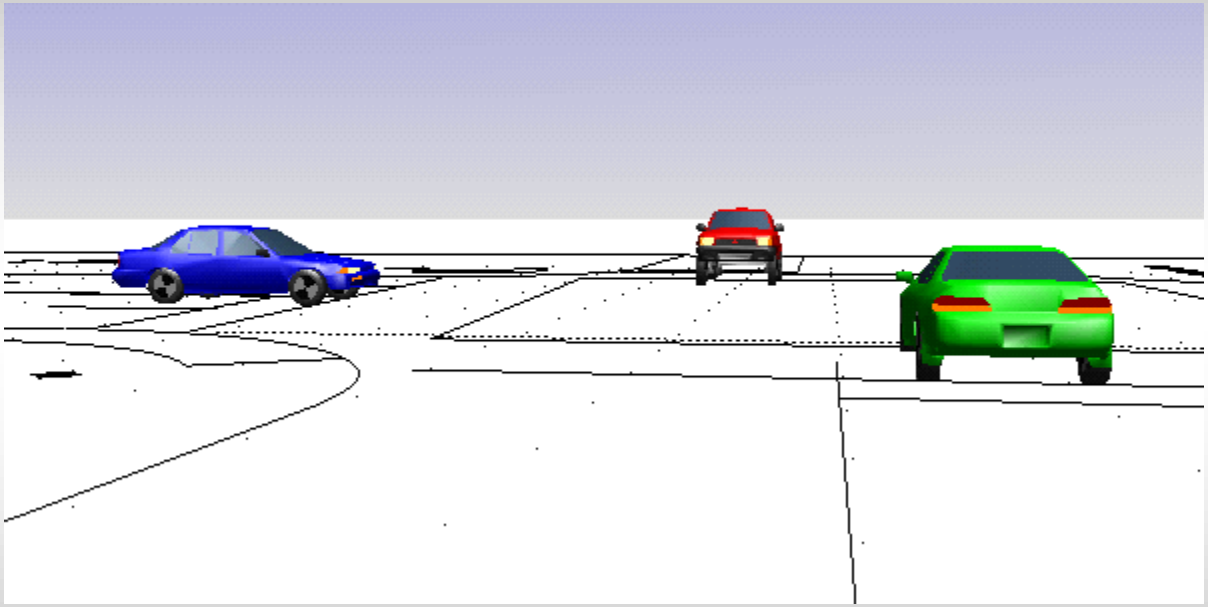
Methode: Numerische Integration

Inverse Dynamik

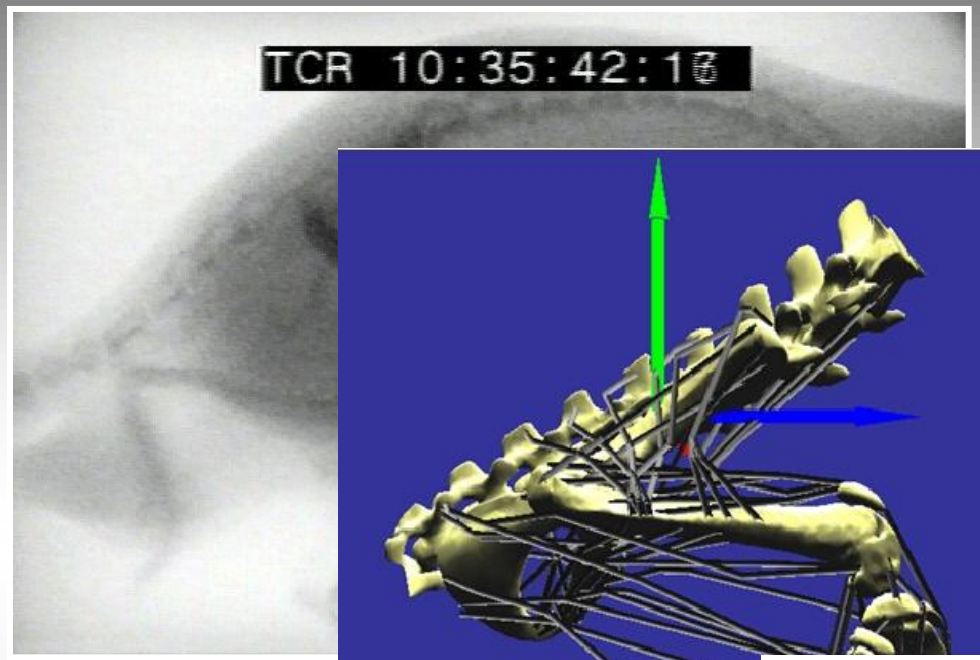


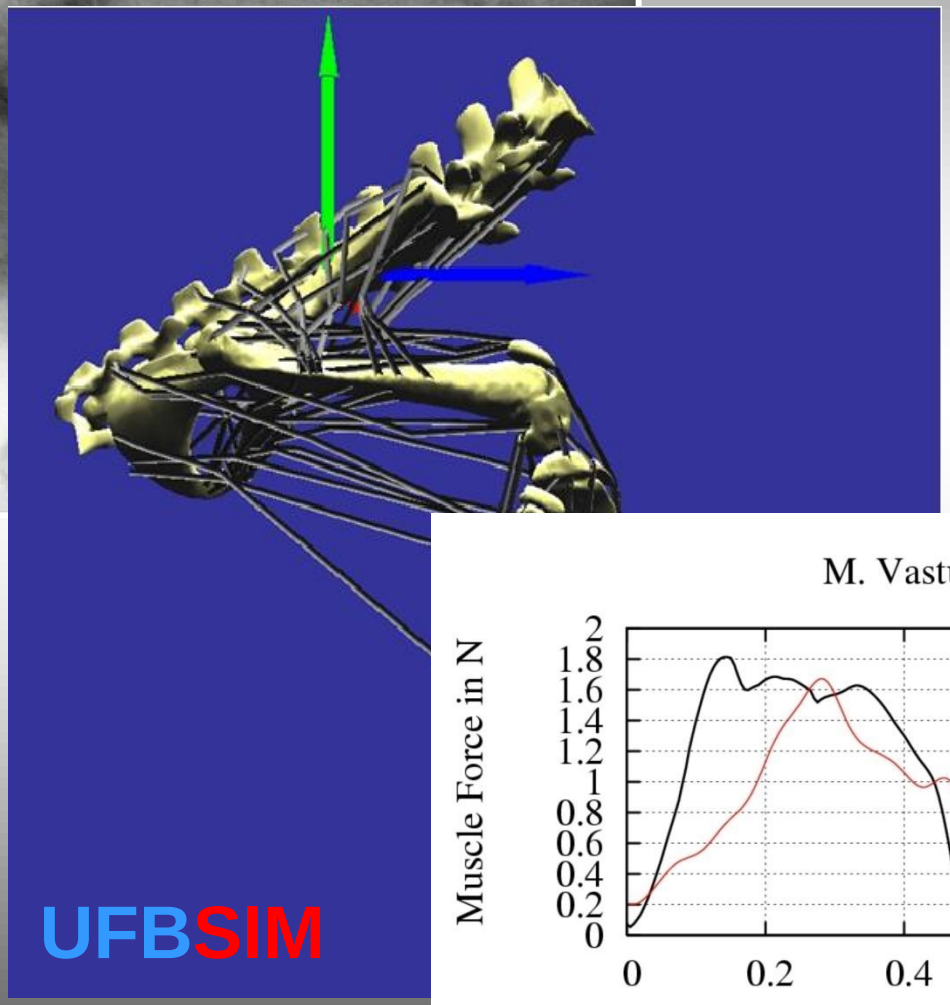
Methoden: Numerisches Differenzieren, nichtlineare Gleichungssysteme, Optimierungsverfahren

Beispiel zur Vorwärts-Dynamik: “Unfallhergang”

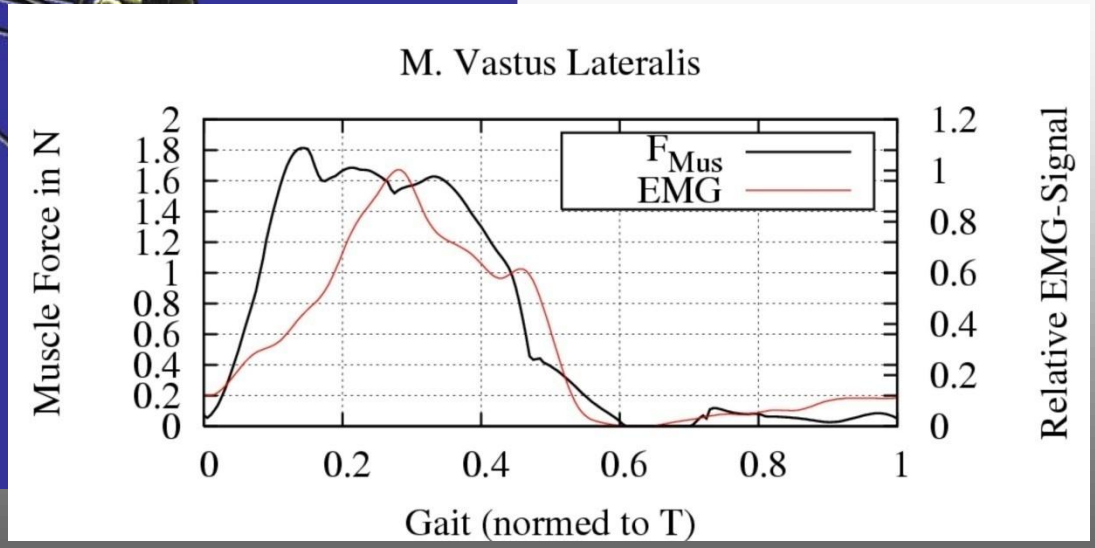


Beispiel zur Inversen Dynamik: „Ratten-Gang“





Erik Forster
Uwe Wolfram



Software

Numerische Methoden, allgemein:	
MATLAB	Universelles Numerik-Programm (eigene Programmiersprache) http://www.mathworks.com
NAG	Große Sammlung sehr leistungsstarker Routinen für Fortran oder C http://www.nag.co.uk (Vorcompilierte Object-Libraries)
Numerical Recipes	Große Sammlung leistungsstarker Routinen für Fortran, C, C++ http://www.nag.co.uk (Bücher und Quellcode)
Finite-Elemente-Programme:	
ABAQUS	Universelles, professionelles FE-Software-Paket http://www.abaqus.com
ANSYS	Universelles, professionelles FE-Software-Paket http://www.ansys.com Aktuelle Hochschulversion (128.000 Elemente): 7.0 Deutscher Vertrieb: Fa. CADFEM, http://www.cadfem.de
MSC.Patran/Nastran MSC.Marc/Mentat	Universelles, professionelles FE-Software-Paket http://www.mscsoftware.com
CAMMPUS	Für Lehre frei verfügbares, kleines FE-Programm von Prof. Dankert, FH Hamburg. Für Fachwerksberechnungen. Mit Quellcode FEMSET. http://www.fh-hamburg.de/rzbt/dnksoft/cammpus
MATLAB (PDE)	PDE Toolbox: FE für 2D Probleme http://www.mathworks.com

Software

Fuzzy-Logic-Programme:	
MATLAB	Fuzzy-Logic-Toolbox: leicht zu bedienen http://www.mathworks.com
Mehr-Körper-Simulations-Programme (MKS):	
MSC.ADAMS	Universelles, professionelles MKS-Software-Paket http://www.mscsoftware.com
DADS	Universelles, professionelles MKS-Software-Paket http://www.lmsintl.com/
MADYMO	Software-Paket zur Insassensicherheit, „Virtuelle-Dummies“ http://www.madymo.com (TNO, Niederlande)
alaska	Modellierung und Simulation mechatronischer Systeme http://www.tu-chemnitz.de/ifm (Institut für Mechatronic, TU Chemnitz)
SIMPACK	Universelles, professionelles MKS-Software-Paket, Intec GmbH (DLR) http://www.simpack.de
Programme zur Inversen Dynamik (Ganganalyse):	
ANYBODY	Simulation muskulo-skelettaler Systeme, Aalborg/Dänemark http://anybody.auc.dk
UFBSIM	Simulation muskulo-skelettaler Systeme (von Erik Forster), Institut für Unfallchirurgische Forschung und Biomechanik, Universität Ulm http://www.biomechanics.de, erik.forster@medizin.uni-ulm.de

Literatur

Allgemein

- Schwarz, H.R.: „*Numerische Mathematik*“, Teubner 1997
  Klassiker der numerischen Mathematik, 37,- €

- Dankert, H. und Dankert, J.: „Technische Mechanik“; Statik, Festigkeitslehre, Kinematik/Kinetik, mit Programmen; 2. Aufl.; Teubner, 1995.
  Lehrbuch mit numerischer Anwendung u.a. FEM
  http://www.fh-hamburg.de/rzbt/dnksoft/cammpus/
  (Scripte, auch „Num. Methoden“ zum Herunterladen)

Finite-Elemente-Methode (FEM):

- Zienkiewicz, O.C.: „*Methode der finiten Elemente“; Hanser 1975 (engl. 2000).*
  „Bibel“ der FEM

- Bathe, K.-J.: „*Finite-Elemente-Methoden“; erw.* 2. Aufl.; *Springer 2001*
  Lehrbuch (Theorie) , 100,- €

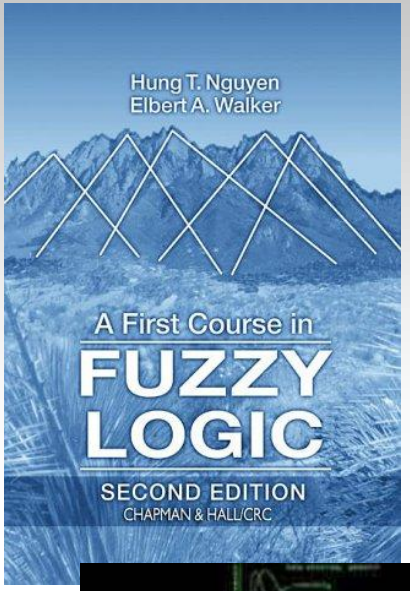
- Müller, G. und Groth, C.: „*FEM für Praktiker, Band 1: Grundlagen*“, mit ANSYS/ED-Testversion (CD). (Band 2: Strukturdynamik; Band 3: Temperaturfelder)
  Übungsbuch, sehr gut für den Einstieg, 98,- €

Literatur

Fuzzy-Logic:

- Drösser, D.: „*Fuzzy Logic – Methodische Einführung in krauses Denken*“; rororo; 1996.
  Taschenbuch, gut zu lesen

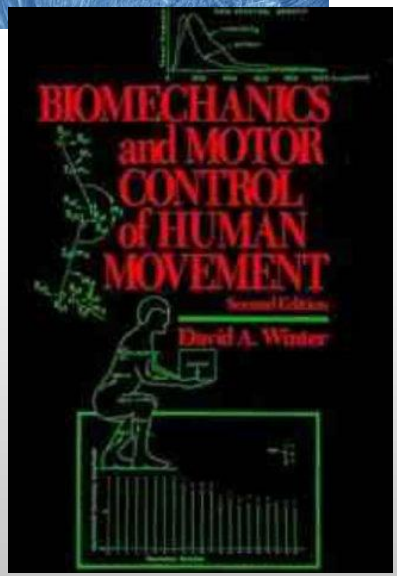
- Hung T. u.a.: „*A First Course in Fuzzy Logic*”; 2. Aufl.; CRC Press; 1999.
  80,- €



Mehr-Körper-Simulation (MKS):

- Haug, E.J.: „*Computer aided kinematics and dynamics of mechanical systems*“; 1989.
  Vom DADS-Entwickler geschrieben, sehr gut

- Nikravesh, P.E.: „*Computer aided analysis of mechanical systems*“ Prentice-Hall; 1988.



Inverse Dynamik (Ganganalyse):

- Nigg, B.M., Herzog, W.: „*Biomechanics of the Musculo-skeletal System*“; Wiley, 1994.

- Winter, D.A.: „*Biomechanics and motor control of human movement*“; Wiley, 1990.

DGfB

Hinweise und Warnungen

- Numerische Methoden (Programm-Pakete) sind Werkzeuge, keine Lösungen
- Vorsicht vor bunten Bildern. Es gilt wie überall: „garbage in - garbage out“ (GiGo).
- Systemparameter
- Verifikation

} erfordern Experimente

- Modelle sind immer fragespezifisch