

Vereinfachte Darstellung von Kräften in Skizzen

In einfachen Fällen, wenn nur wenige Kräfte und Momente zu berücksichtigen sind und evtl. ein lediglich 2D Modell zu berechnen ist, hat sich die „vereinfachte Darstellung“ der Kräfte in Skizzen bewährt, die wir im Folgenden mit (A) bezeichnen.

Bei verwickelteren Problemen und als Vorbereitung für eine systematische Betrachtung in einem Programm sollte man auch in Skizzen die vollständig vektorwertige Darstellung (B) verwenden.

Literaturstellen

In den zwei nachfolgend vorgestellten Lehrbüchern wird diese vereinfachte Darstellung von Vektoren nicht nur angewandt sondern auch erläutert.



Bild 1: Buchdeckel Broomundt et al.

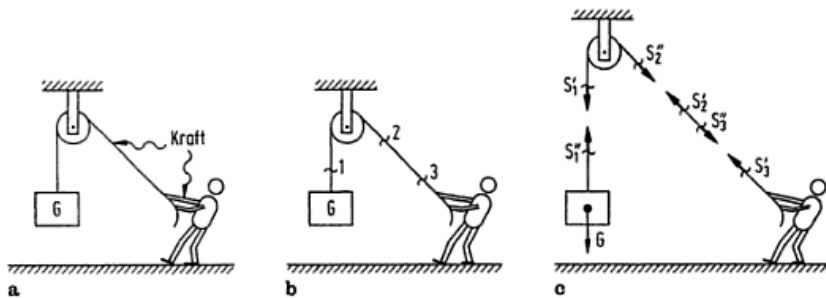


Bild 1-1-1: Seilzug. a, b Lagepläne, c Schnittbilder

Kräfte „sichtbar“ herausgestellt sind. Die dabei entstehenden Teilsysteme (Mensch in Bild 1-1-1c oder Feder in Bild 1-1-2c) „merken“ vom Schneiden nichts. Das Klotzgewicht G als „Fernkraft“ ist in den Schnittbildern ebenfalls als Pfeil gezeichnet (vgl. Abschnitt 1.1.3).

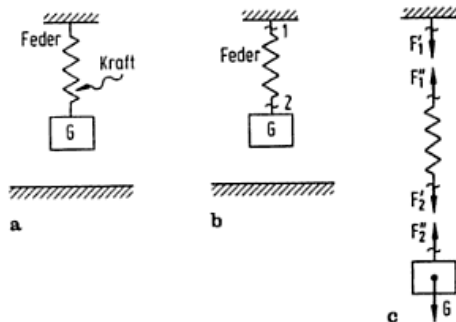


Bild 1-1-2: Feder. a, b Lagepläne, c Schnittbilder

Lageplan, Schnittbild, Freikörper-Bild

Lagepläne zeigen die Lage – die räumliche Anordnung, die Geometrie – des betrachteten und zu untersuchenden mechanischen Systems. In der Regel enthalten sie auch einige bekannte (vorgegebene) Kräfte; in den Beispielen etwa den Hinweis auf das Gewicht G .

Schnittbilder entstehen aus den Lageplänen durch gezielte gedachte Schnitte, die die interessierenden Kräfte „sichtbar“ machen, sie herausstellen. Dazu muß das System noch einmal in geschnittener Form gezeichnet werden.

Freikörper-Bild (engl. *free body diagram*): Ein Körper oder ein Teilsystem von Körpern heißt *freigeschnitten*, wenn es mit keinem anderen Teil des Gesamtgebildes mehr in Verbindung steht und alle Kraftwirkungen, die von „außen“ wirken, durch Kraftpfeile erfaßt sind. (Obige Schnittbilder enthalten die Freikörper-Bilder für die Klötze, das Seilstück zwischen den Schnitten und für die Feder.)

Vektorcharakter der Kraft

Die Schnitte zeigen (vgl. Bild 1-1-3): Kraft = gerichtete Größe.

Sie wird dargestellt durch einen

Vektor	=	Pfeil	mit	Maßzahl.
		↑		↑
		Richtung mit		Größe
		Orientierung		
		(Richtungssinn)		

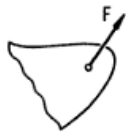


Bild 1-1-3:
Kraftvektor

Reaktionsprinzip

Die Schnitte zeigen auch: Die Kräfte auf die beiden Ufer eines Schnittes gehen auseinander hervor, sie müssen gleiche Größe (Aktion = Reaktion) und Richtung, doch *entgegengesetzte* Orientierung haben (3. Newtonsches Gesetz). In Bild 1-1-4, das ein Seil unter der Wirkung zweier Kräfte F zeigt, gilt also $S' = S'' =: S$. Auch in den Bildern 1-1-1c und 1-1-2c treten die Kräfte *paarig* auf: $S'_1 = S''_1$, $F'_1 = F''_1$ usw. Man kann sich vorstellen, daß bei einem Wieder-Zusammensetzen der Teile der Schnittbilder die paarigen Kräfte sich gerade wieder wegheben.

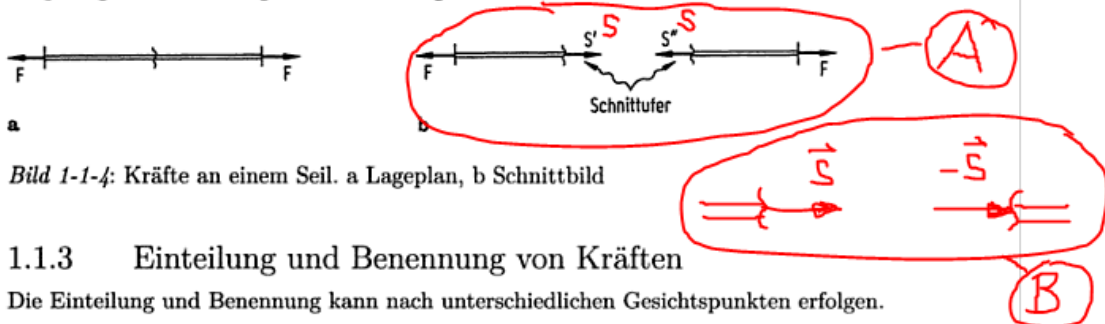


Bild 1-1-4: Kräfte an einem Seil. a Lageplan, b Schnittbild

1.1.3 Einteilung und Benennung von Kräften

Die Einteilung und Benennung kann nach unterschiedlichen Gesichtspunkten erfolgen.

Physikalischer Charakter: Bild 1-1-5a zeigt einen auf der Erde liegenden Körper. Sein Gewicht G ist eine *Fernkraft*. Sie hängt von der gegenseitigen Lage von Körper und Erde sowie von einer physikalischen Konstanten, der Gravitationskonstanten, ab. Andere Fernkräfte stammen z. B. aus dem elektrischen und dem magnetischen Feld.

Die in Bild 1-1-5b durch den Schnitt „freigesetzte“ Druckkraft D ist eine *Nahkraft* (Berührkraft, Kontaktkraft). Sie entsteht als Reaktion der Körper auf die Berührung und heißt deshalb *Reaktionskraft* (vgl. Zwangskraft unten).

Zählt man die Kraft-Wechselwirkungen der Atomphysik zu den Fernkräften, so entfallen die Nahkräfte. Das Reaktionsprinzip gilt in allen Fällen.

Es gilt

$$\mathbf{A} = |\mathbf{A}| \mathbf{e}_A.$$

1.2.3 Schreibweise mit Einheitsvektor und Maßzahl

Die Bezeichnungsweise mit Hilfe eines Pfeiles *und* mit $\mathbf{A}$ ist in gewissem Sinne redundant: Pfeil und $\mathbf{A}$ bedeuten dasselbe! In Bild 1-2-8 sei der Vektorpfeil $\mathbf{A}$ maßstäblich

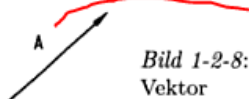


Bild 1-2-8:
Vektor

fettes A, also Darstellungsart (B),
also so: $\vec{A}$

gezeichnet, z. B. sei der Kräftemaßstab $1 \text{ cm} \hat{=} 1 \text{ N}$. In diesem Fall ist der Vektor durch das geometrische Bild des Pfeils vollständig bestimmt, und das Symbol $\mathbf{A}$ hat nur noch den Charakter einer Benennung. Hier ermöglicht die Einführung des Einheitsvektors mit Maßzahl eine vereinfachte Darstellung.

Vorgehensweise (s. Bild 1-2-9): Bei Rechnungen kennt man oft die Wirkungslinie des Vektors, vgl. Abschnitt 1.1.4, doch ist die Orientierung (der Pfeilsinn) noch unbekannt. Man legt einen Einheitsvektor $\mathbf{e}_A$ auf der Wirkungslinie w von $\mathbf{A}$ willkürlich fest – führt also eine bestimmte Orientierung als positiv ein – und schreibt

$$\mathbf{A} = A \mathbf{e}_A.$$



Bild 1-2-9:
Wirkungslinie von $\mathbf{A}$ und Einheitsvektor $\mathbf{e}_A$

Die Größe A heißt Maßzahl; sie kann positiv oder negativ sein. Bei negativer Maßzahl A ist $\mathbf{A}$ dann entgegen $\mathbf{e}_A$ orientiert. Man sollte jedoch Maßzahlen mit *vorgestelltem* Minuszeichen vermeiden und stattdessen die Pfeile umkehren (vgl. Bilder 1-2-11 und 1-2-12b). Der Vergleich von $\mathbf{A} = A \mathbf{e}_A$ und $\mathbf{A} = |\mathbf{A}| \mathbf{e}_A$ liefert $|A| = |\mathbf{A}|$.

Vereinfachte Darstellung von Vektoren

Die Schreibweise von Einheitsvektor mit Maßzahl gestattet eine vereinfachte und sehr zweckmäßige Darstellung von Vektoren, vor allem von Kräften in Skizzen, die man einer Berechnung zugrunde legen will (s. Bild 1-2-10): Der Pfeil steht für den Einheitsvektor $\mathbf{e}_A$ (= orientierte Richtung), der Buchstabe A ist Maßzahl (= skalarer Faktor) und dient gleichzeitig zur Bezeichnung.

Hinweise: Ein Vektor, wie in Bild 1-2-10, muß in Vektoraussagen (Vektorformeln) stets und in Fällen eines möglichen Mißverständnisses auch im Text mit $\mathbf{A}$ oder $A \mathbf{e}_A$ – und

(A)

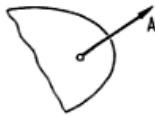


Bild 1-2-10:
Vereinfachte Darstellung eines Vektors

nicht mit A – bezeichnet werden. Häufig kommen die Vektoren A und $-A$ mit gleichen oder verschiedenen parallelen Wirkungslinien in derselben Skizze vor (z.B. als Paar

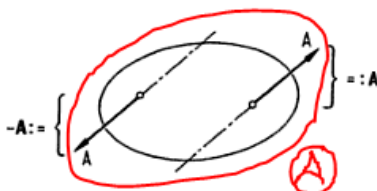


Bild 1-2-11:
Entgegengesetzt orientierte Vektoren

von Reaktionskräften). Aus $A = Ae_A$ folgt dann $-A = -Ae_A = A(-e_A) = Ae_A^*$, wobei $e_A^* := -e_A$ der gegensinnig zu e_A liegende Einheitsvektor ist (vgl. Pfeil bei $-A$ im Bild 1-2-11). Da man in der Zuordnung der Pfeile zu A und $-A$ frei ist, weisen wir in solchen Bildern mit $=: A$ und $=: -A$ auf die *gewählte* Zuordnung hin. Wenn man will, kann man die Kräfte auch mit A' und A'' unterscheiden, wie wir es in den Bildern 1-1-1, 1-1-2 und 1-1-4 getan haben.

Interpretationsbeispiele zur vereinfachten Darstellung

Gegeben sei eine Darstellung wie in Bild 1-2-10. Die zugehörige Rechnung liefere z. B. a) $A = 3,7 \text{ N}$, b) $A = -3,7 \text{ N}$. Dann gelten für das Ergebnis die in Bild 1-2-12 gezeigten Darstellungen.

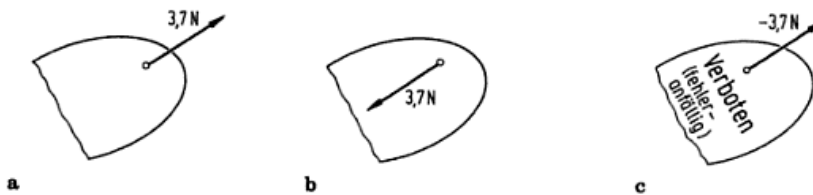


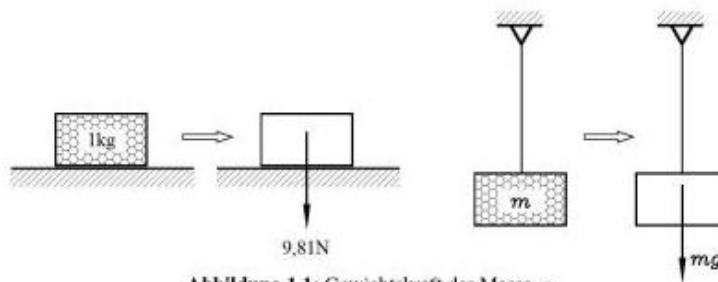
Bild 1-2-12: Ergebnisdarstellungen

1.3 Axiome der Statik

Das Ziel dieses Abschnittes ist nicht ein axiomatischer Aufbau der gesamten Mechanik, sondern eher eine Auflistung aller experimentellen Erfahrungen, die die *Statik* von Körpern betreffen. Der Anfänger soll hieran vor allem erkennen, in welcher Weise man Erfahrungen abstrahiert, soll sehen, wie man Idealgebilde (Modelle) an die Stelle der realen Körper setzt.



Bild 6: Buchdeckel vom Buch Dankert & Dankert.

Abbildung 1.1: Gewichtskraft der Masse m **Beispiel:**

Für eine Masse m_1 auf der Erdoberfläche (der Abstand zum Erdmittelpunkt beträgt $R = 6373 \text{ km}$, die Erdmasse ist $m_2 = 5,97 \cdot 10^{24} \text{ kg}$) errechnet man

$$F_G = \frac{m_1 \cdot 5,97 \cdot 10^{24} \text{ kg} \cdot 6,672 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2}{6373^2 \cdot 10^6 \text{ m}^2 (\text{kg})^2} = m_1 \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}. \quad (1.2)$$

Die Wirkung der stets zum Erdmittelpunkt gerichteten Gewichtskraft kann durch eine Umlenkrolle beeinflusst werden, so dass sie an einem anderen Körper in beliebiger Richtung angreift:

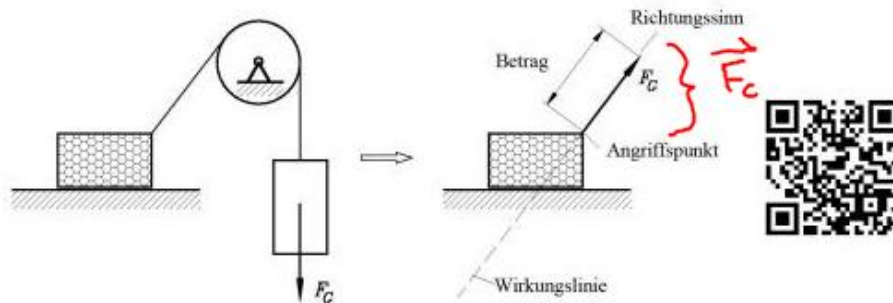


Abbildung 1.2: Eine Kraft wird durch vier Attribute beschrieben (eine Bemerkung zu diesem Bild findet man unter www.TM-aktuell.de)

Die *Masse* ist eine skalare Größe, die durch die Angabe eines *skalaren Wertes* (einschließlich physikalischer Einheit) ausreichend bestimmt ist.

Die *Kraft* ist eine *gerichtete Größe* (ein Vektor), die erst ausreichend bestimmt ist durch Angabe

- eines *skalaren Wertes* (einschließlich physikalischer Einheit),
- einer *Richtung*, gekennzeichnet durch die so genannte *Wirkungslinie*,
- eines *Richtungssinns*, gekennzeichnet durch die Pfeilspitze,
- eines *Angriffspunktes*.

1.2 Axiome der Statik

Axiome sind Lehrsätze, die eine Theorie begründen, ohne bewiesen werden zu müssen. Mit ihnen wird die theoretische Basis eines Wissenschaftszweiges gelegt. Ein praxisorientiertes Gebiet wie die Technische Mechanik muss seine Axiome natürlich an der Übereinstimmung mit der Realität messen lassen.

Die Statik kommt mit den nachfolgenden vier Axiomen aus, die die gesamte theoretische Grundlage für dieses Gebiet darstellen. Ob die Probleme der technischen Praxis damit ausreichend genau erfasst werden, muss im Einzelfall an der Übereinstimmung mit den Idealisierungen, die der Theorie zugrunde liegen, überprüft werden. Die wichtigste Idealisierung, auf der die Axiome der Statik aufbauen, ist die

Definition des starren Körpers:

Ein *starrer Körper* ist ein fiktives Gebilde, das sich unter der Einwirkung von Kräften nicht verformt.

Damit ist auch der Rahmen der Gültigkeit für alle Untersuchungen abgesteckt, die nach den Regeln der Statik angestellt werden. Wenn für ein Problem die Idealisierung „Starrer Körper“ nicht zu rechtfertigen ist (und in der Realität gibt es ein solches Gebilde ja nicht), können die Fragestellungen nicht mehr allein nach den Regeln der Statik behandelt werden. Für sehr viele praktisch sehr wichtige Aufgaben kann man jedoch (bei ausgezeichneter Übereinstimmung mit der Realität) die zu untersuchenden Körper als starr ansehen. Die folgenden vier Axiome sind die Basis für die Statik der starren Körper, wozu bemerkt werden muss, dass in der technischen Literatur weder die Anzahl noch die Reihenfolge (im Gegensatz zu den NEWTONschen Axiomen der Mechanik) einheitlich gehandhabt werden.

1. Axiom (Linienflüchtigkeit der Kräfte):

Die Wirkung einer Kraft auf einen starren Körper bleibt unverändert, wenn man sie entlang ihrer Wirkungslinie verschiebt.

Es ist leicht einzusehen, dass dieses Axiom nur für den starren Körper gelten kann: In der **Abbildung 1.3** (auf der Seite 4) sei der Hebel ohne Belastung im Gleichgewicht. Werden nun zwei Kräfte F_1 und F_2 aufgebracht, so dass

$$F_1 a = F_2 b$$

gilt, bleibt der Hebel im Gleichgewicht, unabhängig davon, ob beide am oberen Holm angreifen (Fall a) oder aber die Kraft F_1 entlang ihrer Wirkungslinie verschoben ist und am unteren Holm angreift (Fall b). Aus der Sicht der Statik unter der Annahme, dass der Hebel starr ist, sind die beiden Fälle äquivalent. Ein deformierbarer Hebel würde sich aber in beiden Fällen unterschiedlich verformen (für eine Verformungsuntersuchung darf eine Kraft also nicht verschoben werden), sogar das Gleichgewicht könnte (durch Veränderung der Hebelarme bei großer Verformung) gestört werden.

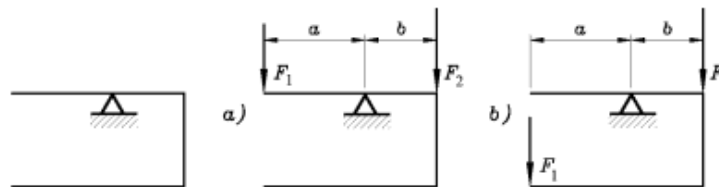
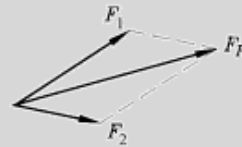


Abbildung 1.3: Bei Verschiebung einer Kraft entlang ihrer Wirkungslinie bleibt das Gleichgewicht erhalten

2. Axiom (Kräfteparallelogramm):

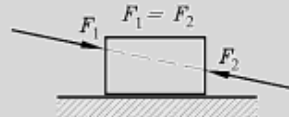
Die Wirkung zweier Kräfte F_1 und F_2 , die an einem gemeinsamen Punkt angreifen, ist gleich einer Kraft F_R , die sich als Diagonale eines mit den Seiten F_1 und F_2 gebildeten Parallelogramms ergibt.



Sonderfall: Wenn F_1 und F_2 auf der gleichen Wirkungslinie liegen, entartet das Parallelogramm, und der Betrag von F_R ergibt sich aus der Summe bzw. der Differenz der Beträge von F_1 und F_2 .

3. Axiom (Gleichgewicht):

Zwei Kräfte sind im Gleichgewicht (und heben damit ihre Wirkung auf den starren Körper auf), wenn sie auf der gleichen Wirkungslinie liegen, den gleichen Betrag haben und entgegengesetzt gerichtet sind.



Man beachte, dass das 3. Axiom auch nur für den starren Körper gelten kann, weil deformierbare Körper sich natürlich auch bei Einwirkung einer Gleichgewichtsgruppe verformen und außerdem durch die Verformung die Voraussetzung für den Gleichgewichtszustand zweier Kräfte (gleiche Wirkungslinie) verloren gehen kann.

4. Axiom (Wechselwirkungsgesetz):

Wird von einem Körper auf einen zweiten Körper eine Kraft ausgeübt, so reagiert dieser mit einer gleich großen, auf gleicher Wirkungslinie liegenden, aber entgegengesetzt gerichteten Kraft (NEWTON: **actio = reactio**).

Das 2. und das 4. Axiom sind nicht an die Voraussetzung des starren Körpers gebunden und sind auch über die Statik starrer Körper hinaus gültig.

Obwohl Kräfte Vektoren sind, wird in der Technischen Mechanik im Allgemeinen nur mit den Beträgen der Vektoren gerechnet, wobei natürlich die in der Vektordarstellung enthaltenen Informationen (Richtung und Richtungssinn) bei Addition und Subtraktion von Kräften beachtet werden müssen. Die Richtung wird durch das (im Kapitel 2 erstmalig behandelte) Arbeiten mit Komponenten, der Richtungssinn durch das Vorzeichen berücksichtigt.

u. nur bei einfachen Fällen

Beispiel: Beim 3. Axiom wird die Gleichheit der Beträge von F_1 und F_2 bei entgegengesetztem Richtungssinn gefordert:

A $F_1 = F_2$, aber vektoriell: $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$ B

Bei Rechnung mit den Beträgen muss bei der Addition der unterschiedliche Richtungssinn berücksichtigt werden:

$$F_1 + (-F_2) = F_1 - F_2 = 0 \quad (\text{Gleichgewicht}).$$

der Pfeile i.d. Skizze

1.3 Das Schnittprinzip

Um die zwischen zwei Körpern wirkenden Kräfte sichtbar zu machen, führt man (gedanklich) an der Berührungsstelle einen Schnitt und trägt an den beiden *Schnittufern* unter Beachtung des Wechselwirkungsgesetzes (4. Axiom) die *Schnittkräfte* an, die dadurch von inneren zu äußeren Kräften werden.



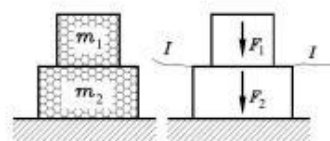
Nur durch konsequente Anwendung solcher Schnittführungen (konsequent heißt, wirklich **alle** äußeren Bindungen eines Körpers zu lösen → **Schnittprinzip**) kann erreicht werden,

- dass **alle** am Körper angreifenden Kräfte sichtbar werden und
- komplizierte Probleme auf überschaubare Teilprobleme reduziert werden können.

Die an den beiden Schnittufern anzutragenden Kräfte treten stets **paarweise** auf (an jedem Schnittufer eine Kraft), liegen auf der gleichen Wirkungslinie, haben den gleichen Betrag, sind aber **entgegengesetzt** gerichtet.

Dabei repräsentiert die an einem Körper anzutragende Kraft immer die Wirkung, die der **weggeschnittene Teil** auf den Körper ausübt. Vielfach wird der Richtungssinn dieser Schnittkräfte nicht mit Sicherheit voraussagen sein. In diesen Fällen darf man den Richtungssinn willkürlich festlegen. Die anschließende Rechnung korrigiert ihn gegebenenfalls über das Vorzeichen des Ergebnisses. Das äußerst wichtige Thema „Schnittprinzip“ zieht sich wie ein roter Faden durch die Teilgebiete der Technischen Mechanik. Deshalb ist ihm eine ausführliche Ergänzung unter www.TM-aktuell.de gewidmet.

Beispiel 1: Die beiden auf einer Unterlage gestapelten Massen m_1 und m_2 belasten diese durch ihre Gewichtskräfte F_1 und F_2 . Um die Frage nach den zwischen m_1 und m_2 bzw. zwischen m_2 und der Unterlage wirkenden Kräfte zu beantworten, wird zunächst der Schnitt *I-I* geführt.



An den beiden Schnittufern werden die Kräfte F_I angetragen (entgegengesetzt gerichtet, jedoch gleicher Betrag und gleiche Wirkungslinie).

Damit ist die Masse m_1 von allen äußeren Bindungen gelöst, alle an ihr angreifenden Kräfte (F_1 und F_I) sind angetragen, das „Teilsystem 1“ kann nach dem 3. Axiom nur bei

$$F_I = F_1$$

im Gleichgewicht sein, womit die Frage nach der Kraft, die zwischen den beiden Massen wirkt, beantwortet ist.

Um die Kraft zwischen m_2 und der Unterlage zu ermitteln, wird Schnitt II-II gelegt, die beiden Schnittkräfte F_{II} werden angetragen, und damit ist auch Teilsystem 2 von äußeren Bindungen befreit.

Die gegebene Kraft F_2 und die am System 1 berechnete Kraft $F_I = F_1$ können (2. Axiom) zu $(F_1 + F_2)$ zusammengefasst werden, und diese resultierende Kraft kann mit F_{II} nur im Gleichgewicht sein (3. Axiom), wenn die folgende Beziehung gilt:

$$F_{II} = F_1 + F_2 = F_I + F_2.$$

Wäre nur die Frage nach der Kraft F_{II} zu beantworten gewesen, hätte der nebenstehend skizzierte Schnitt genügt, um das „System m_1 und m_2 “ von allen äußeren Bindungen zu lösen, und man wäre mit entsprechenden Überlegungen wie oben zum gleichen Ergebnis gekommen (Zusammenfassen von F_1 und F_2 nach dem 2. Axiom, Gleichgewicht, wenn $F_{II} = F_1 + F_2$ entsprechend Axiom 3).

In diesem Fall wären die zwischen den Massen m_1 und m_2 wirkenden Kräfte nicht in die Betrachtung einzubeziehen, weil sie „innere Kräfte des Systems“ sind und als solche paarweise auftreten und sich in ihrer Wirkung aufheben. Die Art einer sinnvollen Schnittführung ist also auch von der Fragestellung abhängig. Von besonderer Wichtigkeit ist aber die Beachtung der folgenden Regel:

Wenn Gleichgewichtsbetrachtungen angestellt werden, müssen *alle* an einem System (oder Teilsystem) wirkenden Kräfte einbezogen werden. Dazu ist das Freischneiden von allen äußeren Bindungen und das Antragen der Schnittkräfte erforderlich.

Es ist sinnvoll, zwischen *eingepägten Kräften* (vorgegebene Belastung, Gewichtskräfte) und den durch sie hervorgerufenen (und mit dem Schnittprinzip sichtbar gemachten) *Reaktionskräften* zu unterscheiden, obwohl eigentlich auch die eingepägten Kräfte als Schnittkräfte interpretierbar sind: Wenn man das Schnittprinzip auch auf die so genannten „Fernkräfte“ (z. B. die Gravitationskräfte) ausdehnt, kann die Gewichtskraft einer Masse als Schnittkraft interpretiert werden, die erst durch das „Wegschneiden der Erde“ sichtbar wird. An die von der Masse gelöste Erde muss dann die entsprechende Gegenkraft angetragen werden. Eine solche (durchaus korrekte) Betrachtungsweise ist in der Technischen Mechanik allerdings nicht üblich.

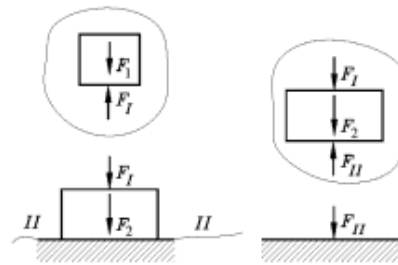


Abbildung 1.4: Freischneiden der Einzelmassen (zwei Gleichgewichtsbedingungen)

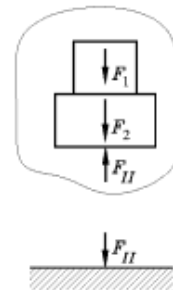


Abbildung 1.5: Alternative Schnittführung