Universität Ulm
Institut für Festkörperphysik
Prof. Dr. P. Ziemann

17.01.2012

Seminar zur Einführung in die Festkörperphysik
WS 2011/2012, Blatt 6

(Besprechung: 25.01.2012)

Aufgabe 16: Elektronen im 1-dimensionalen periodischen Potential

a) Gegeben sei ein periodisches, eindimensionales Potential mit $V(x + a) = V(x)$.
Zeigen Sie, dass der Hamilton-Operator mit dem Translationsoperator $T(a)$ vertauscht, welcher über die Translationssymmetrie des Gitters definiert ist
($T(a)\Psi(x) = \Psi(x + a)$). Leiten Sie den Translationsoperator $T(a)$ explizit her.

Hinweis: Entwickeln Sie $\Psi(x + a)$ für kleine a in eine Taylorreihe um x.

b) Leiten sie unter Zuhilfenahme des Translationsoperators $T(a)$ das Bloch-Theorem her.

Zeigen Sie dass die Wellenfunktionen die Form $\Psi_k(x)=e^{ikx}\varphi_k(x)$
haben, wobei $\varphi_k(x+a) = \varphi_k(x)$ gilt.

Hinweis: Benutzen Sie die Hilfsfunktion $W(x) = \Psi_{E1}(x)\, \Psi'_{E2}(x) - \Psi_{E2}(x)\, \Psi'_{E1}(x)$, wobei $\Psi_{Ei}(x)$ Eigenfunktionen zu den Energien $E1=E2$ sind. Zeigen Sie, dass $W(x)$ eine Eigenfunktion von $T(a)$ ist.

c) Zeigen Sie, dass der Tight-Binding-Ansatz für die elektronische Wellenfunktion $\varphi_{nk}(r)$ wie in der Vorlesung angegeben das Bloch-Theorem erfüllt.

Aufgabe 17: Elektronen im 2-dimensionalen periodischen Potential

Betrachten Sie ein quadratisches Gitter in zwei Dimensionen mit dem Kristallpotential

$$V(x, y) = -4V \cos\frac{2\pi x}{a} \cos\frac{2\pi y}{a}$$

Berechnen Sie näherungsweise die Energielücke für den Eckpunkt $\{\pi/a, \pi/a\}$ der Brillouin–Zone.