

Starrer Körper: System von Massepunkten m_i , deren Abstände $|\vec{r}_i - \vec{r}_j|$ untereinander konstant sind.

Der Zustand läßt sich beschreiben durch:

- Position des Schwerpunktes,
- Orientierung des Körpers.

⇒ 6 Freiheitsgrade der Bewegung: 3 Translation, 3 Rotation

Wir betrachten nun die Bewegung des starren Körpers in einem *raumfesten Inertialsystem*. Die Koordinate eines Massepunktes ist darin:

$$\vec{r}_i = \vec{R} + \vec{r}'_i,$$

wobei \vec{R} der Ursprung des *koerperfesten Koordinatensystems* ist (meist der Schwerpunkt). Daraus folgt die Geschwindigkeit

$$\vec{v}_i = \vec{V} + (\vec{\omega} \times \vec{r}'_i).$$

\vec{V} : Geschwindigkeit des Körpers; $\vec{\omega}$: Winkelgeschwindigkeit des Körpers

Damit ist die gesamte kinetische Energie des Körpers:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_i m_i V^2 + \sum_i m_i (\vec{\omega} \times \vec{r}'_i) \cdot \vec{V} + \frac{1}{2} \sum_i m_i (\vec{\omega} \times \vec{r}'_i)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} M V^2 + (\vec{V} \times \vec{\omega}) \cdot \underbrace{\sum_i m_i \vec{r}'_i}_{=0} + \frac{1}{2} \sum_i m_i (\vec{\omega} \times \vec{r}'_i)^2 \\
&\quad \text{wenn der Ursprung des} \\
&\quad \text{körperfesten Systems in den} \\
&\quad \text{Schwerpunkt gelegt wird.} \\
&= \frac{1}{2} M V^2 + \frac{1}{2} \sum_i m_i (\vec{\omega} \times \vec{r}'_i)^2 \\
&= T_{\text{SP}} + T_{\text{rot}}.
\end{aligned}$$

Die kartesischen Komponenten von \vec{r}'_i und $\vec{\omega}$ seien (r_{i1}, r_{i2}, r_{i3}) sowie $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$, dann können wir mit

$$\begin{aligned}
(\vec{\omega} \times \vec{r}'_i)^2 &= \vec{\omega}^2 r_i'^2 - (\vec{\omega} \cdot \vec{r}'_i)^2 \\
&= \sum_{\alpha=1}^3 r_{i\alpha}^2 \sum_{\beta=1}^3 \omega_\beta^2 - \sum_{\alpha,\beta=1}^3 (\omega_\alpha r_{i\alpha}) (\omega_\beta r_{i\beta}) \\
&= \sum_{\alpha,\beta=1}^3 \omega_\alpha \omega_\beta (\vec{r}'_i{}^2 \delta_{\alpha\beta} - r'_{i\alpha} r'_{i\beta})
\end{aligned}$$

den letzten Term umschreiben:

$$\begin{aligned}
T_{\text{rot}} &= \frac{1}{2} \sum_i m_i (\vec{\omega} \times \vec{r}'_i)^2 \\
&= \frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta=1}^3 \omega_\alpha \omega_\beta \sum_i m_i (\vec{r}'_i{}^2 \delta_{\alpha\beta} - r'_{i\alpha} r'_{i\beta}).
\end{aligned}$$

Mit der Einsteinschen Summenkonvention wird daraus:

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} I_{\alpha\beta} \omega_\alpha \omega_\beta = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \underline{\underline{I}} \cdot \vec{\omega},$$

wobei wir den **Trägheitstensor** des starren Körpers definiert haben als:

$$I_{\alpha\beta} = \sum_i m_i (\vec{r}'_i{}^2 \delta_{\alpha\beta} - r'_{i\alpha} r'_{i\beta}).$$

Für eine kontinuierliche Masseverteilung lautet der Trägheitstensor demnach

$$I_{\alpha\beta} = \int d^3 r' \varrho(\vec{r}') [\delta_{\alpha\beta} \vec{r}'^2 - r'_\alpha r'_\beta].$$

Analog zur kinetischen Energie kann auch der **Drehimpuls** aus dem Drehimpuls des Schwerpunktes um den Ursprung des raumfesten Koordinatensystems und dem Drehimpuls des starren Körpers um seinen Schwerpunkt zusammengesetzt werden:

$$\vec{L} = \vec{L}_{\text{SP}} + \vec{L}'.$$

Für den Eigendrehimpuls erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\vec{L}' &= \sum_i m_i \vec{r}'_i \times \vec{v}'_i \\
&= \sum_i m_i \vec{r}'_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}'_i) \\
&= \sum_i m_i \{ \vec{\omega} \vec{r}'_i{}^2 - \vec{r}'_i (\vec{\omega} \cdot \vec{r}'_i) \}
\end{aligned}$$

und in Komponenten

$$\begin{aligned}
 L'_\alpha &= \sum_i m_i \left\{ \omega_\alpha \vec{r}'_i{}^2 - r'_{i\alpha} (\omega_\beta \cdot r'_{i\beta}) \right\} \\
 &= \sum_i m_i \left\{ \vec{r}'_i{}^2 \delta_{\alpha\beta} - r'_{i\alpha} r'_{i\beta} \right\} \omega_\beta \\
 &= I_{\alpha\beta} \omega_\beta.
 \end{aligned}$$

Der Trägheitstensor gibt damit das Verhältnis von Winkelgeschwindigkeit und Drehimpuls an. Aufgrund des Tensorcharakters von I sind beide im allgemeinen *nicht* parallel zueinander.

Der Trägheitstensor ist ein reell symmetrischer Tensor, d.h. alle $I_{\alpha\beta}$ sind reell und $I_{\alpha\beta} = I_{\beta\alpha}$. Derartige Tensoren lassen sich durch eine geeignete Wahl des körpereigenen Koordinatensystems (bzw. Drehung des KS) diagonalisieren. Durch eine solche **Hauptachsentransformation** nimmt der Trägheitstensor die Form:

$$I = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}$$

an, wobei die Achsen nun **Hauptachsen** und die Komponenten I_1, I_2, I_3 Hauptträgheitsmomente genannt werden.

Damit nehmen kinetische Energie und Drehimpuls die folgende Form an:

$$\begin{aligned}
 T_{\text{rot}} &= \frac{1}{2} (I_1 \omega_1^2 + I_2 \omega_2^2 + I_3 \omega_3^2) \\
 L'_i &= I_i \omega_i.
 \end{aligned}$$

(Bei Rotation um eine Hauptachse sind \vec{L} und $\vec{\omega}$ nun parallel zueinander.)

Man bezeichnet einen starren Körper mit:

- drei voneinander verschiedenen Hauptträgheitsmomenten als **unsymmetrischen Kreisel**,
- zwei gleichen Hauptträgheitsmomenten als **symmetrischen Kreisel**,
- drei gleichen Hauptträgheitsmomenten als **Kugelkreisel**.

Wir betrachten nun die zeitliche Änderung von \vec{L}' , also des Drehimpulses bezüglich des Schwerpunktes:

$$\dot{\vec{L}}' = \frac{d}{dt} \sum_i m_i (\vec{r}'_i \times \dot{\vec{r}}'_i) = \sum_i m_i (\vec{r}'_i \times \ddot{\vec{r}}'_i) = \sum_i m_i (\vec{r}'_i \times \vec{K}'_i) = \vec{M}',$$

d. h. das Drehmoment \vec{M}' wird durch die äußeren Kräfte \vec{K}'_i festgelegt.

Es ist hierbei zu beachten, daß dieses Koordinatensystem mit dem starren Körper rotiert. Daher müssen wir die Relation

$$\dot{\vec{L}}' = \left(\frac{d\vec{L}'}{dt} \right)_{\text{Raum}} = \left(\frac{d\vec{L}'}{dt} \right)_{\text{Koerper}} + \vec{\omega} \times \vec{L}'$$

beachten, wobei das körperfeste System nun das Hauptachsensystem des starren Körpers ist.

Komponentenweise schreibt sich damit also die Bewegungsgleichung zu:

$$\begin{aligned} I_1 \frac{d\omega_1}{dt} + (I_3 - I_2) \omega_2 \omega_3 &= M'_1, \\ I_2 \frac{d\omega_2}{dt} + (I_1 - I_3) \omega_1 \omega_3 &= M'_2, \\ I_3 \frac{d\omega_3}{dt} + (I_1 - I_2) \omega_1 \omega_2 &= M'_3. \end{aligned}$$

Dies sind die **Eulerschen Gleichungen**.

Bemerkungen:

- Diese Gleichungen enthalten die Komponenten von $\vec{\omega}$ und \vec{M}' des *bewegten* Hauptachsensystems.
- In diesem beschleunigten Bezugssystem treten Trägheitskräfte auf, die quadratisch in ω sind.
- Die Berechnung von \vec{M}' erfordert in der Regel bereits Kenntnis von der Bewegung.
- Die Lösung der Euler-Gleichungen gelten nur für einen mitbewegten Beobachter. Für einen Beobachter im raumfesten Koordinatensystem ist die Ableitung erheblich aufwändiger.

Sofern kein Drehmoment auf den Kreisel wirkt (**kräftefreier** Kreisel) reduzieren sich die Euler-Gleichungen auf:

$$\begin{aligned} I_1 \dot{\omega}_1 &= (I_2 - I_3) \omega_2 \omega_3, \\ I_2 \dot{\omega}_2 &= (I_3 - I_1) \omega_3 \omega_1, \\ I_3 \dot{\omega}_3 &= (I_2 - I_1) \omega_1 \omega_2. \end{aligned}$$

Anwendungen sind:

- Kugelkreisel ($I_1 = I_2 = I_3$):

$$\begin{aligned} I_1 \dot{\omega}_1 &= 0, \\ \implies I_2 \dot{\omega}_2 &= 0, \\ I_3 \dot{\omega}_3 &= 0. \end{aligned}$$

Daraus folgt $\dot{\omega}_1 = \dot{\omega}_2 = \dot{\omega}_3 = 0$

- Symmetrischer Kreisel ($I_1 = I_2 \neq I_3$):

$$\begin{aligned} I_1 \dot{\omega}_1 &= (I_1 - I_3) \omega_2 \omega_3, \\ I_1 \dot{\omega}_2 &= (I_3 - I_1) \omega_3 \omega_1, \\ I_3 \dot{\omega}_3 &= 0. \end{aligned}$$

Daraus folgt $\omega_3 = \text{const.}$, so daß

$$\begin{aligned}\dot{\omega}_1 &= -\omega_2 \left(\frac{I_3 - I_1}{I_1} \omega_3 \right) \\ \dot{\omega}_2 &= \omega_1 \left(\frac{I_3 - I_1}{I_1} \omega_3 \right)\end{aligned}$$

Mit der Definition $\Omega = \frac{I_3 - I_1}{I_1} \omega_3$ wird daraus

$$\begin{aligned}\dot{\omega}_1 &= -\Omega \omega_2 \\ \dot{\omega}_2 &= \Omega \omega_1\end{aligned}$$

Bemerkungen:

- ω_1 und ω_2 variieren harmonisch,
- ω_1 und ω_2 sind um 90° außer Phase.

Nehmen wir an, daß $\vec{\omega}$ zur Zeit $t = 0$ in der xz -Ebene liegt und einen Winkel λ mit der z -Achse bildet, so gilt zur Zeit $t = 0$:

$$\omega_1 = \omega \sin \lambda, \quad \omega_2 = 0, \quad \omega_3 = \omega \cos \lambda.$$

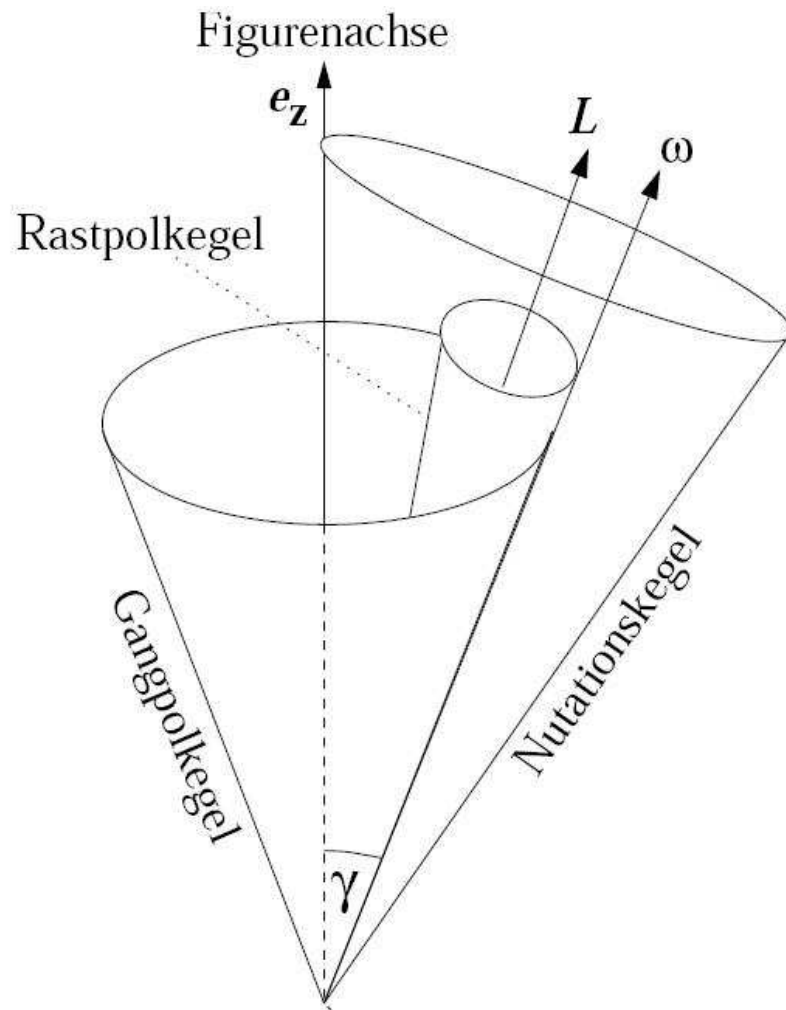
und wir erhalten die Lösungen der Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned}\omega_1(t) &= \omega \sin \lambda \cos \Omega t, \\ \omega_2(t) &= \omega \sin \lambda \sin \Omega t, \\ \omega_3(t) &= \omega \cos \lambda,\end{aligned}$$

und das entsprechende Drehmoment:

$$\begin{aligned}L'_1 &= I_1 \cdot \omega \sin \lambda \cos \Omega t, \\ L'_2 &= I_1 \cdot \omega \sin \lambda \sin \Omega t, \\ L'_3 &= I_3 \cdot \omega \cos \lambda.\end{aligned}$$

Man bemerke, daß $\bar{\omega} = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2} = \omega |\sin \lambda|$ unabhängig von der Zeit ist, so daß der Winkel zwischen Symmetrieachse und Winkelgeschwindigkeit im Laufe der Bewegung immer gleich λ bleibt. Gleichzeitig führt der Vektor der Winkelgeschwindigkeit eine uniforme **Präzessionsbewegung** mit der Winkelgeschwindigkeit Ω um die Symmetrieachse aus.



Wir fassen somit zusammen:

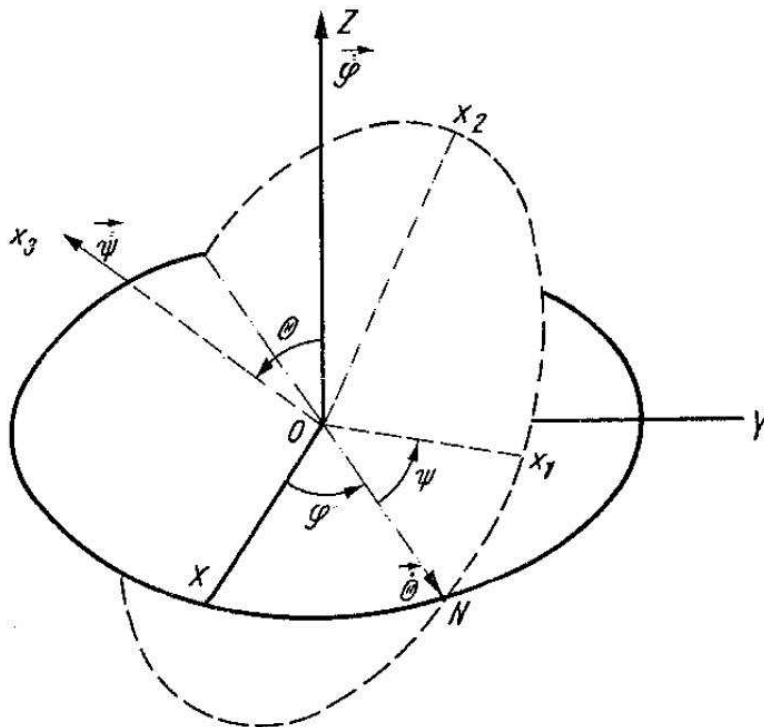
- \vec{L} bewegt sich genauso wie $\vec{\omega}$ mit der Winkelgeschwindigkeit Ω um die Figurenachse,
- $|\vec{L}| = \text{const.}$ und $|\vec{\omega}| = \text{const.}$,
- die Figurenachse, \vec{L} und $\vec{\omega}$ liegen in einer Ebene,
- der Drehimpuls behält für den Fall $\vec{M}' = 0$ seine Richtung.

⇒ Daher bewegt sich der Kreisel derart, daß der mit der Figurenachse verbundene **Gangpolkegel** um den raumfesten **Rastpolkegel** rotiert. Diese Bewegung wird *Nutation* oder **reguläre Präzession** genannt.

(Näheres siehe weiter hinten)

- Unsymmetrischer Kreisel ($I_1 \neq I_2 \neq I_3$):
Hierfür lassen sich die Euler-Gleichungen nicht vereinfachen.

Euler-Winkel



(aus Landau & Lifschitz, Bd. 1: Mechanik)

Um die Bewegung nicht nur im körperfesten Koordinatensystem, sondern auch im raumfesten Inertialsystem beschreiben zu können, müssen wir einen geeigneten Satz von Koordinaten einführen. Hier erweisen sich die **Euler-Winkel** φ, ψ, θ als sehr hilfreich.

Im Folgenden sollen die Achsen X, Y, Z des Inertialsystems in die Achsen x_1, x_2, x_3 des körperfesten Koordinatensystems überführt werden. Da es sich in beiden Fällen um rechtwinklige Systeme handelt, können wir dies durch eine Kombination von drei Drehungen erreichen:

- Drehung um die Z -Achse um den Winkel φ , wobei φ der Winkel zwischen der X -Achse und der sogenannten Knotenlinie \overline{ON} ist. Die Knotenlinie ist die Schnittlinie der XY -Ebene des Inertialsystems mit der x_1x_2 -Ebene des körperfesten Koordinatensystems und steht demnach senkrecht zur Z -Achse und senkrecht zur x_3 -Achse.
- Drehung um die Knotenlinie (neue x -Achse) um den Winkel θ . Dies überführt die Z -Achse des Inertialsystems in die x_3 -Achse des mitbewegten Koordinatensystems.
- Drehung um die x_3 -Achse (die neue Z -Achse) um den Winkel ψ . Dadurch geht die Knotenlinie in die x_1 -Achse über.

Bei diesen Drehungen nehmen φ und ψ Werte zwischen 0 und 2π an, und θ zwischen 0 und π .

Nun wollen wir die Winkelgeschwindigkeit durch die Euler-Winkel ausdrücken. Dazu betrachten wir zunächst einen Drehung $\dot{\theta}$ um die Knotenlinie. Dies führt zu Beiträgen:

$$\omega_1 = \dot{\theta} \cos \psi, \quad \omega_2 = -\dot{\theta} \sin \psi, \quad \omega_3 = 0.$$

Eine Drehung $\dot{\psi}$ führt zu den Komponenten

$$\omega_1 = 0, \quad \omega_2 = 0, \quad \omega_3 = \dot{\psi},$$

und eine Drehung $\dot{\varphi}$ führt zu

$$\omega_1 = \dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi, \quad \omega_2 = \dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi, \quad \omega_3 = \dot{\varphi} \cos \theta.$$

Zusammengefaßt für eine Kombination aller drei Drehungen ergibt sich also:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \dot{\theta} \cos \psi + \dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi, \\ \omega_2 &= -\dot{\theta} \sin \psi + \dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi, \\ \omega_3 &= \dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi}. \end{aligned}$$

Freier symmetrischer Kreisel

Die Lagrange-Funktion für die Rotationsbewegung des Kreisels nimmt mit den Euler-Winkeln die folgende Form an:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= T = \frac{1}{2} I_1 (\omega_1^2 + \omega_2^2) + \frac{1}{2} I_3 \omega_3^2 \\ &= \frac{1}{2} I_1 (\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{1}{2} I_3 (\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi})^2. \end{aligned}$$

Die Winkel φ und ψ sind für den symmetrischen Kreisel zyklisch, so daß die zugehörigen kanonisch konjugierten Impulse Konstanten der Bewegung sind

$$\begin{aligned} p_\varphi &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = I_1 \dot{\varphi} \sin^2 \theta + I_3 (\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi}) \cos \theta = \text{const.}, \\ p_\psi &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} = I_3 (\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi}) = \text{const.} \end{aligned}$$

Die dritte Bewegungsgleichung bekommen wir aus der Lagrange-Gleichung für die Variable θ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} &= \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \\ \iff I_1 \dot{\varphi}^2 \sin \theta \cos \theta - I_3 (\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi}) \dot{\varphi} \sin \theta &= I_1 \ddot{\theta} = \dot{p}_\theta. \end{aligned}$$

Die Tatsache, daß $p_\psi = \text{const.}$ ist, identifizieren wir mit der Aussage, daß

$$\omega_3 = \dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi} = \text{const.},$$

d. h. die Winkelgeschwindigkeit um die Figurenachse des Kreisels ist konstant.

Damit läßt sich die Gleichung für \dot{p}_θ auch umschreiben zu:

$$\dot{\varphi} \sin \theta (I_1 \dot{\varphi} \cos \theta - I_3 \omega_3) = I_1 \ddot{\theta}.$$

Wir bemerken, daß die verallgemeinerten Impulse direkte physikalische Bedeutung haben:

- p_ψ : Projektion des Drehimpulses auf die Figurenachse,

- p_φ : Projektion des Drehimpulses auf die raumfeste z -Achse,
- p_θ : Projektion des Drehimpulses auf die Knotenlinie.

Für p_ψ und p_θ ist das offensichtlich, für p_φ sieht man das folgendermaßen:
Die Projektion des Drehimpulses auf die z -Achse ist

$$\begin{aligned}
 & L_3 \cos \theta + L_1 \sin \theta \sin \psi + L_2 \sin \theta \cos \psi \\
 = & I_3 \omega_3 \cos \theta + I_1 (\omega_1 \sin \theta \sin \psi + \omega_2 \sin \theta \cos \psi) \\
 = & I_3 \omega_3 \cos \theta + I_1 \dot{\varphi} \sin^2 \theta \\
 = & p_\varphi,
 \end{aligned}$$

wobei wir die Ausdrücke für ω_i durch die Euler-Winkel ersetzt haben.

Für die Bewegung des Kreisels im Inertialsystem wählen wir wieder die raumfeste z -Achse parallel zum Drehimpuls. Damit ist

$$\begin{aligned}
 p_\varphi &= |\vec{L}| = L = \text{const.} \\
 p_\psi &= p_\varphi \cos \theta = L \cos \theta = \text{const.}
 \end{aligned}$$

Diese Gleichungen implizieren $\theta = \text{const.}$, d. h. der Winkel zwischen Drehimpuls und Figurenachse bleibt konstant. Hieraus (oder aus der Tatsache, daß die Knotenlinie senkrecht zur raumfesten z -Achse steht) folgt

$$p_\theta = 0.$$

Aus der Konstanz von p_φ zusammen mit der Konstanz von θ folgt

$$\dot{\varphi} = \text{const.}$$

Wegen $p_\psi = I_3 (\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi})$ folgt dann auch

$$\dot{\psi} = \text{const.}$$

Da mit unserer Koordinatenwahl $p_\theta = 0$ und damit auch $\dot{p}_\theta = 0$ ist, erhalten wir aus der Bewegungsgleichung für θ

$$\begin{aligned}
 & I_1 \dot{\varphi}^2 \sin \theta \cos \theta - I_3 \omega_3 \dot{\varphi} \sin \theta = 0 \\
 \Leftrightarrow & \dot{\varphi} \cos \theta = \frac{I_3 \omega_3}{I_1} \quad (\theta \neq 0).
 \end{aligned}$$

Beachten wir

$$\begin{aligned}
 L = p_\varphi &= I_3 \omega_3 \cos \theta + I_1 \dot{\varphi} \sin^2 \theta \\
 &= I_1 \sin^2 \theta \frac{I_3 \omega_3}{I_1 \cos \theta} + I_3 \omega_3 \cos \theta = \frac{I_3 \omega_3}{\cos \theta}
 \end{aligned}$$

so erhalten wir

$$\dot{\varphi} = \frac{L}{I_1}.$$

Aus $\omega_3 = \dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi}$ folgt schließlich

$$\begin{aligned}\dot{\psi} &= \omega_3 = \dot{\varphi} \cos \theta = \omega_3 - \frac{I_3 \omega_3}{I_1} = \frac{I_1 - I_3}{I_1} \omega_3 \\ \Leftrightarrow \dot{\psi} &= -\frac{I_3 - I_1}{I_1} \omega_3 = -\Omega.\end{aligned}$$

Aus $\vec{L} = L \cdot \vec{e}_z$ und (wegen $\dot{\theta} = 0$) $\vec{\omega} = \dot{\varphi} \cdot \vec{e}'_z + \dot{\psi} \cdot \vec{e}_z$ folgt, daß \vec{L} , $\vec{\omega}$ und die Figurenachse \vec{e}_z in einer Ebene liegen.

Die Ebene aus \vec{e}_z , \vec{e}'_z und $\vec{\omega}$ präzediert um die z -Achse (der Drehimpulsachse) mit der Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi} = L/I_1$. Zusätzlich dreht sich der Kreisel noch um seine eigene Achse mit der Winkelgeschwindigkeit $\dot{\psi} = -\Omega$.

Wir können die Bewegung im körperfesten Koordinatensystem auch aus der Lösung im raumfesten Inertialsystem explizit rekonstruieren. Dazu betrachten wir $\dot{\psi} = -\Omega = \text{const.}$, so daß $\psi = -\Omega t + \psi_0$. Da $\dot{\theta} = 0$ erhalten wir

$$\begin{aligned}\omega_1 &= \dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi = -\dot{\varphi} \sin \theta \sin \Omega t - \psi_0, \\ \omega_2 &= \dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi = \dot{\varphi} \sin \theta \cos \Omega t - \psi_0, \\ \omega_3 &= \dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi} = \dot{\varphi} \cos \theta - \Omega.\end{aligned}$$

Vergleich mir der Lösung der Euler-Gleichungen

$$\begin{aligned}\omega_1(t) &= \omega \sin \lambda \cos \Omega t, \\ \omega_2(t) &= \omega \sin \lambda \sin \Omega t, \\ \omega_3(t) &= \omega \cos \lambda,\end{aligned}$$

gibt die Gleichungen $\psi_0 = +\frac{\pi}{2}$ und

$$\begin{aligned}\omega \sin \lambda &= \dot{\varphi} \sin \theta, \\ \omega \cos \lambda &= \dot{\varphi} \cos \theta - \Omega.\end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned}\cot \lambda &= \cot \theta - \frac{\Omega}{\dot{\varphi} \sin \theta} \\ &= \cot \theta - \frac{I_3 - I_1}{I_1} \omega_3 \frac{I_1 \cos \theta}{I_3 \omega_3 \sin \theta} \\ &= \cot \theta \left\{ 1 - \frac{I_3 - I_1}{I_1} \right\} \\ \Leftrightarrow \cot \lambda &= \frac{I_1}{I_3} \cot \theta.\end{aligned}$$

Dies gibt die Beziehung zwischen dem Winkel λ (Winkel zwischen $\vec{\omega}$ und \vec{e}_z) und θ (Winkel zwischen \vec{e}'_z und \vec{e}_z) an. Dementsprechend gilt schließlich

$$\frac{\bar{\omega}}{\omega} = \tan \lambda = \frac{I_3}{I_1} \tan \theta.$$

Beispiel Erde:

$$\begin{aligned}\frac{I_3 - I_1}{I_1} &\approx \frac{1}{300} \ll 1 \\ \theta &\approx \lambda \approx 6 \cdot 10^{-7} \\ \Rightarrow \omega_3 &\approx \omega = \frac{2\pi}{\text{Tag}}\end{aligned}$$

\implies Präzessionsfrequenz von \vec{e}_z um \vec{L} ist

$$\dot{\varphi} = \frac{I_3}{I_1} \frac{\omega_3}{\cos \theta} \approx \omega_3 \approx \omega,$$

d. h. die Figurenachse rotiert im raumfesten Inertialsystem einmal täglich um die Richtung des Drehimpulses. Figurenachse und Drehimpulsachse liegen am Nordpol nur um wenige Meter auseinander.

Außerdem rotiert die Erde noch langsam um die Figurenachse (im Inertialsystem) mit der Winkelgeschwindigkeit

$$\Omega = \frac{I_3 - I_1}{I_1} \omega_3 \approx \frac{\omega}{300},$$

d. h. diese Rotation findet einmal in 300 Tagen statt. Im körperfesten Koordinatensystem führt dies zur Rotation der Winkelgeschwindigkeit um die Figurenachse.