Übungen zur Theoretischen Physik II   Sommer 2007, Blatt 1

Abgabetermin: Mittwoch, 25.04.2007, 12:15 Uhr in der Vorlesung

---

Aufgabe 1: Krummlinige Koordinaten (7 P.)
Die Koordinaten q_1, q_2, q_3 seien definiert durch

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2}\left(q_1^2 - q_2^2\right), \\ y &= q_1 \cdot q_2, \\ z &= q_3, \end{aligned}$$

wobei x, y, z die kartesischen Koordinaten sind.

(a) Handelt es sich um ein orthogonales Koordinatensystem?

(b) Wie sehen die Koordinatenflächen aus?

(c) Berechnen Sie die metrischen Koeffizienten g_1, g_2, g_3.

Zur Erinnerung: $g_i = \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}\right|$, wobei $\vec{r} = \vec{r}(x, y, z)$.

Aufgabe 2: Einfache Differentialgleichungen (8 P.)

(a) Die Bewegungsgleichung des gedämpften harmonischen Oszillators lautet:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega^2 x = 0$$

(i) Führen Sie die Substitution $x(t) = u(t) \cdot w(t)$ ein und wählen Sie die Funktion $u(t)$ so, daß der Term $\dot{w}$ in der Gleichung verschwindet.

(ii) Setzen Sie $u(t)$ in die Gleichung ein und geben Sie die beiden Lösungen für $w(t)$ und damit für $x(t)$ an. Unterscheiden Sie dabei die Fälle $\omega < \gamma, \omega = \gamma$, und $\omega > \gamma$.

(b) Berechnen Sie die Lösung der Bewegungsgleichung für einen Spin im Magnetfeld

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\omega y, \\ \dot{y} &= \omega x. \end{aligned}$$

Hinweis: Vereinfachen Sie das Gleichungssystem auf *eine* Gleichung.

Aufgabe 3: Gradient (5 P.)
Der Gradient $\nabla f(\vec{r})$ eines Feldes $f(\vec{r})$ (wobei $\vec{r} = (x_1, x_2, x_3)$) ist definiert als

$$\nabla f(\vec{r}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3}\right).$$

(a) Beschreiben Sie die anschauliche Bedeutung des Gradienten in Worten.

(b) Berechnen Sie den Gradienten der folgenden Felder

$$f_1(\vec{r}) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{3} D_{ij}x_i x_j \qquad\qquad f_2(\vec{r}) = \frac{(\vec{a}\cdot\vec{r})}{r^3}.$$

($\vec{a}$ ist beliebig, D_{ij} sind Kostanten).

Aufgabe 4: Integrale (5 P.)

Gegeben sei ein Vektorfeld $\vec{A} = (ax, by, cz)$.

(a) Berechnen Sie das Oberflächenintegral über eine Kugel K um den Koordinatenursprung mit dem Radius R.

$$\oint_{F_K} \vec{A}\cdot d\vec{f}$$

(b) Berechnen Sie über dieselbe Kugel das folgende Volumenintegral

$$\int_{V_K} \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\right) dV.$$