14 Satz von Cayley–Hamilton

Gegeben sei eine $n \times n$ Matrix $\mathbf{A}$ mit der charakteristischen Gleichung

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = P_n(\lambda) = 0 \tag{1}$$

$$P_n(\lambda) = a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \ \ldots \ + a_1 \lambda + a_0 \tag{2}$$

Dann „erfüllt“ auch die Matrix $\mathbf{A}$ ihre charakteristische Gleichung, wenn man für $\lambda \to \mathbf{A}$, für $a_0 \to a_0 \mathbf{E}$ und für $0 \to \mathbf{0}$ setzt:

$$a_n \mathbf{A}^n + a_{n-1} \mathbf{A}^{n-1} + \ \ldots \ + a_1 \mathbf{A} + a_0 \mathbf{E} = \mathbf{0} \tag{3}$$

(Satz von Cayley–Hamilton).

Bew.: Wir wollen diesen Satz für hermitische (d. h. auch für reelle symmetrische) Matrizen zeigen.

Alle n Eigenvektoren hermitischer $(n \times n)$–Matrizen können orthonormal gewählt werden. Für unterschiedliche Eigenwerte sind die zugehörigen Eigenvektoren ohnehin orthogonal, bei Entartung kann man eine Gram–Schmidt–Orthogonalisierung durchführen. Eine anschließende Normierung ist immer möglich.

Man kann die Eigenwertgleichung

$$\mathbf{A}\vec{x}_i = \lambda_i \vec{x}_i \qquad i = 1, \ \ldots \ n$$

für alle Eigenwerte $\lambda_1, \ \lambda_2, \ \ldots \ \lambda_n$ gleichzeitig schreiben als

$$\mathbf{AU} = \mathbf{U\Lambda} \tag{4}$$

$\mathbf{U}$ ist die Orthogonalmatrix ($\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{U}^{\mathrm{T}}$) der Eigenvektoren, $\mathbf{\Lambda}$ die Diagonalmatrix der Eigenwerte.

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \\ \vec{x}_1 & \vec{x}_2 & \ldots & \vec{x}_n \\ \\ \end{pmatrix} \qquad \mathbf{\Lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ & & \vdots & \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Wir ersetzen in (3) zunächst $\mathbf{A}$ durch $\mathbf{\Lambda}$:

$$a_n\,\mathbf{\Lambda}^n + a_{n-1}\,\mathbf{\Lambda}^{n-1} + \;\ldots\; + a_1\,\mathbf{\Lambda} + a_0\,\mathbf{E} = \mathbf{0} \tag{5}$$

Die Potenzen von $\mathbf{\Lambda}$ sind

$$\mathbf{\Lambda^k} = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \ldots & 0 \\ & & \vdots & \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n^k \end{pmatrix} \qquad k \in \mathbb{N} \tag{6}$$

Für jede Position $(11, 12, \ldots 1n, 21, \ldots, 2n, \ldots\ldots nn)$ ist die Gleichung (5) offensichtlich einzeln richtig. Für die Außerdiagonalelemente gilt

$$a_n\ \cdot 0^n + a_{n-1}\ \cdot 0^{n-1} + \;\ldots\; + a_1\ \cdot 0 + a_0\ \cdot 0 = 0 \tag{7}$$

während für die Diagonalelemente in Position $(\ell\ell)$

$$a_n\,\lambda_\ell^n + a_{n-1}\,\lambda_\ell^{n-1} + \;\ldots\; + a_1\,\lambda_\ell + a_0 = 0 \tag{8}$$

ist. Aus (7) und (8) folgt Gleichung (5). Wir lösen (4) nach $\mathbf{\Lambda}$ auf

$$\mathbf{\Lambda} = \mathbf{U}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{U} \tag{9}$$

und setzen $\mathbf{\Lambda}$ (9) in Gleichung (5) ein.

$$a_n\,(\mathbf{U}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{U})^n + a_{n-1}\,(\mathbf{U}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{U})^{n-1} + \;\ldots\; + a_1\,(\mathbf{U}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{U}) + a_0\,\mathbf{E} = \mathbf{0} \tag{10}$$

Die „inneren“ $\mathbf{U}^{-1}\mathbf{U}$ in den $(\mathbf{U}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{U})^k$ heben sich jeweils weg und es bleibt

$$a_n\,\mathbf{U}^{-1}\mathbf{A}^n\mathbf{U} + a_{n-1}\,\mathbf{U}^{-1}\mathbf{A}^{n-1}\mathbf{U} + \;\ldots\; + a_1\,(\mathbf{U}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{U}) + a_0\,\mathbf{E} = \mathbf{0} \tag{11}$$

Wir multiplizieren (11) von links mit $\mathbf{U}$ und von rechts mit $\mathbf{U}^{-1}$. Dann erhalten wir wieder Gleichung (3)

$$a_n\,\mathbf{A}^n + a_{n-1}\,\mathbf{A}^{n-1} + \;\ldots\; + a_1\,\mathbf{A} + a_0\,\mathbf{E} = \mathbf{0} \tag{12}$$

und haben damit den Satz von Cayley–Hamilton für hermitische Matrizen gezeigt. (q.e.d.)

Damit kann man relativ einfach inverse Matrizen berechnen. Wir multiplizieren (3) mit $\mathbf{A}^{-1}$ (hier ausnahmsweise egal, ob von rechts oder links)

$$a_n\,\mathbf{A}^{n-1} + a_{n-1}\,\mathbf{A}^{n-2} + \ \ldots\ + a_1\,\mathbf{E} + a_0\,\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{0} \tag{13}$$

und lösen (13) nach $\mathbf{A}^{-1}$ auf:

$$\mathbf{A}^{-1} = -\,\frac{1}{a_0}\,\left(a_n\,\mathbf{A}^{n-1} + a_{n-1}\,\mathbf{A}^{n-2} + \ \ldots\ + a_1\,\mathbf{E}\right) \tag{14}$$

Wir betrachten als Zahlenbeispiel die Matrix $\mathbf{B}$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

mit der charakteristischen Gleichung

$$\lambda^3 - 3\,\lambda^2 - 6\,\lambda + 1 = 0 \tag{15}$$

Mit dem Satz von Cayley–Hamilton und (15) ergibt sich

$$\begin{aligned} \mathbf{B}^3 - 3\,\mathbf{B}^2 - 6\,\mathbf{B} + \mathbf{E} &= \mathbf{0} \\ \mathbf{B}^2 - 3\,\mathbf{B} - 6\,\mathbf{E} + \mathbf{B}^{-1} &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

und schließlich

$$\mathbf{B}^{-1} = 6\mathbf{E} + 3\mathbf{B} - \mathbf{B}^2 \tag{16}$$

Nach der Berechnung von $\mathbf{B}^2$ als

$$\mathbf{B}^2 = \begin{pmatrix} 9 & 7 & 8 \\ 4 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

ergibt sich explizit

$$\mathbf{B}^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 3 & 3 & 3 \\ 6 & 3 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 9 & 7 & 8 \\ 4 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -2 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \tag{17}$$