ulm university universität
uulm

Prof. Dr. F. Schulz
K. Stucke
SoSe 2010

Gesamt: 24 Punkte

Übungen zur Vektoranalysis

Blatt: 1

Abgabe bis Mittwoch, 5.05.2010 in Zimmer 2.31, Heho 18

1. Beweise, dass die durch [6]

$$f(x,y) := \begin{cases} 0 & ,\text{falls } x = y = 0 \\ \dfrac{y\sin(xy)}{x^2+y^4} & ,\text{sonst} \end{cases}$$

definierte Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ im Ursprung in jede Richtung differenzierbar, aber nicht stetig ist.

2. Zeige, dass die Gleichung [5]

$$x^y = y^x + 1$$

eine in einer Umgebung von $x_0 = 3$ eindeutig bestimmte stetig differenzierbare Auflösung $y = \varphi(x)$ mit $\varphi(3) = 2$ besitzt. Berechne $\varphi'(3)$.

3. Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) = x^2 - y^2 - 1$ und die Menge $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) = 0\}$. [2+4+4]

   (a) Zeige, dass es zu jedem Punkt von K eine Umgebung gibt, so dass K lokal in der Form $x = \psi(y)$ geschrieben werden kann.

   (b) Gib eine solche Darstellung in einer Umgebung des Punktes $(1,0)$ an.

   (c) Untersuche, für welche Punkte von K es eine Umgebung gibt, so dass K lokal in der Form $y = \varphi(x)$ geschrieben werden kann.

   (d) Gib eine solche Darstellung in einer Umgebung des Punktes $(\sqrt{2}, -1)$ an.

4. Der Asteroidenteil im ersten Quadranten sei parametrisiert durch: [1+3+3]

$$(x(t), y(t)) = \left(\cos^3(t), \sin^3(t)\right), \qquad 0 \le t \le \frac{\pi}{2}.$$

   (a) Stelle die Kurve in einer Zeichnung dar.

   (b) Berechne $s(t)$, d.h. die Kurvenlänge zwischen den Parameterwerten 0 und t.

   (c) Gib damit eine Parametrisierung nach der Bogenlänge an.