Prof. Dr. F. Schulz
K. Stucke
SoSe 2010
Gesamt: 24 Punkte

Übungen zur Vektoranalysis

Blatt: 3

Abgabe bis Mittwoch, 9.06.2010 in Zimmer 2.31, Heho 18

8. Untersuche, ob [5]
$$M = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 x_2^2 + x_1^2 x_3^2 + x_2^2 x_3^2 = 1 \right\}$$
eine differenzierbare Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ ist und bestimme gegebenenfalls die Dimension von M.

9. Die Funktionen $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ seien definiert durch [10]
$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &:= x_1^2 + x_1 x_2 - x_2 - x_3 \\ g(x_1, x_2, x_3) &:= 2x_1^2 + 3x_1 x_2 - 2x_2 - 3x_3. \end{aligned}$$
Zeige, dass
$$C = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : f(x_1, x_2, x_3) = g(x_1, x_2, x_3) = 0 \right\}$$
eine eindimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ ist und dass
$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \qquad \varphi(t) = (t, t^2, t^3)$$
eine globale Parametrisierung von C ist.

10. Sei $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$ die Einheitssphäre. [1+2+2+4]
    (a) Zeige, dass sich S^{n-1} lokal als Urbild einer Funktion gemäß Definition 8.1.1 schreiben lässt.
    (b) Stelle S^{n-1} lokal als Graph einer stetig differenzierbaren Funktion dar.
    (c) Parametrisiere S^{n-1} für $n = 2, 3$ durch sphärische Koordinaten.
    (d) Sei $N = e_1$ der Nordpol von S^{n-1}. Für einen beliebigen Punkt $p \in S^{n-1} \setminus \{N\}$ gibt es genau eine Gerade durch den Nordpol und p. Diese schneidet in genau einem Punkt die Ebene $E = \{u \in \mathbb{R}^n : (u, e_1) = 0\}$. Gibt die so definierte Abbildung $\varphi : S^{n-1} \to E$ an und zeige, dass sie bijektiv ist. Man nennt diese Abbildung auch stereographische Projektion.