Übungen zur Vektoranalysis

Blatt: 4

Abgabe bis Montag, 21.06.2010 in Zimmer 2.10, Heho 18

11. Zeige, dass die Verkettung von Immersionen wieder eine Immersion ist. [4]

12. Wir betrachten die Abbildung [8]

$$X : \left(-2, \frac{3\pi}{2} + 1\right) \to \mathbb{R}^2$$

mit

$$X(t) := \begin{cases} (1, t) & , t \in (-2, 0) \\ (\cos t, \sin t) & , t \in \left[0, \frac{3\pi}{2}\right] \\ \left(t - \frac{3\pi}{2}, -1\right) & , t \in \left(\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} + 1\right). \end{cases}$$

Skizziere das Bild von X.
Zeige, dass X eine injektive Immersion, aber keine Einbettung ist.

13. Sei $X : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ durch [6]

$$X = X(t_1, t_2) = (\sinh t_1 \cos t_2,\ \sinh t_1 \sin t_2,\ t_2)$$

definiert.

(a) Zeige, dass X eine Einbettung ist.

(b) Bestimme in jedem Punkt $(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2$ zwei Tangenten T_1, T_2 und eine Normale N an die Fläche, so dass die Abbildungen $T_1, T_2, N : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ stetig differenzierbar und punktweise linear unabhängig sind.

14. Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ durch [4]

$$f(a) := \left(a_1^2 + a_1 a_2 - a_2 - a_3, 2a_1^2 + 3a_1 a_2 - 2a_2 - 3a_3\right)$$

definiert und sei $M = f^{-1}(0)$.
Untersuche, ob die Abbildung f kritische Werte besitzt und bestimme für jedes $a \in M$ den Tangentialraum $T_a M$ von M im Punkt a.