Dr. H. Lanzinger
K. Stucke
SoSe 2010
Gesamt: 24 Punkte

Übungen zur Höheren Mathematik II für Physiker

Übungsblatt 5

Abgabe Donnerstag, 10.06.2010 vor den Übungen

20. Es sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}, n \in \mathbb{N}$, positiv definit. Zeige, dass A regulär ist und ihre Inverse ebenfalls positiv definit ist. [4]

21. Untersuche – soweit möglich – folgende Matrizen auf Definitheit: [4]

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & -3 \\ -2 & 5 & 3 \\ -3 & 3 & 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 3 & -7 \\ 3 & 0 & 4 \\ -7 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -5 \\ 2 & -5 & -20 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 8 & 4 \\ -8 & -2 & 1 \\ -4 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

22. Entscheide, ob folgende Matrizen unitär diagonalisierbar sind. In diesem Falle führe die unitäre Diagonalisierbarkeit durch. Im anderen Falle bestimme ein unitäres U, so dass U^*AU eine obere Dreiecksmatrix ist (gemäß dem Lemma von Schur): [6]

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

23. (a) Führe für folgende Matrizen A die Hauptachsentransformation durch, d.h. berechne $U \in \mathbb{C}^{n\times n}, \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, mit $U^* = U^{-1}$ und $U^{-1}AU = \mathrm{diag}(\lambda_\nu)$. [8]

$$\begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

(b) Skizziere für die erste Matrix die Punktemenge $\left\{x \in \mathbb{R}^3 : q_A(x) = x^T Ax = 1\right\}$. Berechne für die letzte Matrix A^r für $r \in \mathbb{N}_0$. [2]