Übungen zur Vektoranalysis

Blatt: 6

Abgabe bis Montag, 19.07.2010 in Zimmer 2.10, Heho 18

18. Zwei Immersionen $k, h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ sind gegeben durch [6]

$$k(x,y) := (\cosh x \cos y,\ \cosh x \sin y,\ x)$$
$$h(x,y) := (\sinh x \sin y,\ -\sinh x \cos y,\ y).$$

Man nennt k das Katenoid und h das Helikoid.

(a) Ermittele die Matrixdarstellungen der ersten Fundamentalformen von k und h und überprüfe, ob diese gleich sind.

(b) Skizziere die beiden Flächen.
*Tipp:*Betrachte zunächst die Parameterlinien $x \mapsto k(x,y)$ bzw. $h(x,y)$ sowie $y \mapsto \ldots$

19. Seien $\rho, R, T > 0$ Parameter und $X = X(u,v) = (u\cos v, u\sin v, \rho v)$ eine Fläche definiert für $\Omega = (0,R) \times (0,T)$. [8]
Bestimme den metrischen Tensor und den Flächeninhalt von X.

20. Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $(a < b)$, glatt und überall positiv und sei [8]

$$M := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \quad x^2 + y^2 = f(z)^2 \text{ und } a < z < b\right\}.$$

Zeige, dass

$$A(M) = 2\pi \int_a^b f(z)\sqrt{1 + f'(z)^2}\,dz.$$