

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2-x & -3 & 1 \\ 3 & 1-x & 3 \\ -5 & 2 & -4-x \end{vmatrix} = (2-x) \overbrace{[(1-x)(-4-x) - 6]}^{x^2 + 5x - 4} + 3[-12 - 3x + 15] + 6 + 5 - 5x$$

$$= -x^3 + 2x^2 - 3x^2 + (x + 10x - 20 + 9x + 9 + 11 - 5x)$$

$$= -x(x^2 - x + 2) = -x(x+2)(x-1) \quad \text{EW: } 0, -2, 1$$

$$\left(x_{1/2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2} \right)$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & +1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = 0: \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ -5 & 2 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 11 & 3 \\ 6 & -11 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 11 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} x_2 &= -\frac{3}{11} x_3 \\ x_1 &= -\frac{10}{11} x_3 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow ER = x_3 \begin{pmatrix} -\frac{10}{11} \\ -\frac{3}{11} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = -2$$

$$\begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \\ -5 & 2 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 0 & 21 & 9 \\ 0 & -7 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 0 & 21 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow x_2 = -\frac{3}{7} x_3, \quad x_1 = -\frac{4}{7} x_3 \rightarrow ER = x_3 \begin{pmatrix} -\frac{4}{7} \\ -\frac{3}{7} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = 1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \\ -5 & 2 & -5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & -13 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} x_2 &= 0 \\ x_1 &= -x_3 \end{aligned} \Rightarrow ER = x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$S = \begin{pmatrix} -\frac{10}{11} & -\frac{4}{7} & -1 \\ -\frac{3}{11} & -\frac{3}{7} & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} 5-x & 4 & 2 \\ 4 & 5-x & 2 \\ 2 & 2 & 2-x \end{pmatrix} = (5-x) \left[(5-x)(2-x) - 4 \right] + 4[8-4x-4] + 2[8-10+2x]$$

$$= -x^3 + 5x^2 + 7x^2 - 6x - 35x + 30 + 16x - 16 + 4x + 4$$

$$= -x^3 + 12x^2 - 24x + 10 = (x-1)(-x^2 + 11x - 10) = (x-1)(x-10)(x-1)$$

$$\left[x_{1/2} = \frac{11 \pm \sqrt{121 - 40}}{2} \right] \quad \text{EW: } 1, 10$$

$$\lambda = 1 \quad \begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 4 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} x_3 = -2x_2 - 0x_1 \\ \text{ER} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$\lambda = 10 \quad \begin{pmatrix} -5 & 4 & 2 \\ 4 & -5 & 2 \\ 2 & 2 & -8 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -5 & 4 & 2 \\ 0 & -9 & 18 \\ 0 & 18 & -36 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -5 & 4 & 2 \\ 0 & -9 & 18 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} x_2 = 2x_3 \\ x_1 = 2x_3 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \text{ER} = x_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} 3-x & 0 & -1 \\ 1 & 4-x & -1 \\ -1 & 0 & 3-x \end{pmatrix} = (3-x)(4-x)(3-x) + 4 + x = -x^3 + 10x^2 - 32x + 32$$

$$\lambda = 4: \quad = (x-4)(-x^2 + 6x + 8) = -(x-4)(x-4)(x-2)$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} x_3 = 0, x_1 = 0, x_2 = \text{bel.} \\ \text{ER} = x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$\lambda = 2 \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} x_2 = 0, x_1 = x_3 \\ \Rightarrow \text{ER} = x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$\Rightarrow$ nicht diagonalisierbar

16 a)
$$\int_1^2 \left(\int_0^{2\pi} \sin(\pi r^2) r d\varphi \right) dr = \int_1^2 \pi r (\sin \pi r^2) dr$$

$$= \left[-\frac{1}{2} \cos \pi r^2 \right]_1^2 = -\frac{1}{2} (\cos(4\pi) - \cos(\pi)) = -1$$

b)
$$\int_1^3 \left(\int_0^2 x^2 y^2 + e^{x+y} dx \right) dy = \int_1^3 \left(\frac{8}{3} y^2 + e^{2+y} - e^y \right) dy$$

$$= \left[\frac{8}{9} y^3 + e^{2+y} - e^y \right]_1^3 = 24 - \frac{8}{9} + e^5 - 2e^3 + e$$

c)
$$\int_0^1 \left(\int_x^{x^2+1} xy dy \right) dx = \int_0^1 \left[\frac{1}{2} xy^2 \right]_x^{x^2+1} dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{2} x(x^2+1)^2 - \frac{1}{2} x^3 \right) dx$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{1}{2} x^5 + \frac{1}{2} x^3 + \frac{1}{2} x \right) dx = \left[\frac{1}{12} x^6 + \frac{1}{8} x^4 + \frac{1}{4} x^2 \right]_0^1 = \frac{11}{24}$$

20 a) wahr : $\lambda_1 \vec{a} + \lambda_2 \vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow \lambda_1 \vec{a} + \lambda_2 \vec{b} + 0 \cdot \vec{c} = \vec{0}$

b) wahr : $UR \neq \emptyset \Rightarrow \exists \vec{u} \in UR \Rightarrow -\vec{u} \in UR \Rightarrow \vec{u} - \vec{u} = \vec{0} \in UR$

c) falsch : F Stammfunktion $\Rightarrow F + \text{const}$ Stammf.

d) falsch : $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$ und $\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx$ divergiert

e) falsch : $-1 \leq \frac{1}{x^2}$ und $\int_1^{\infty} -1 dx$ divergiert

f) wahr : $\vec{x}_0 \neq \vec{x}_1$ Lsg. von $A\vec{x} = \vec{b} \Rightarrow \vec{0} \neq \vec{x}_1 - \vec{x}_0$ Lsg. von $A\vec{x} = \vec{0} \Rightarrow \vec{x}_0 + \lambda(\vec{x}_1 - \vec{x}_0)$ sind Lsg. von $A\vec{x} = \vec{b}$

g) wahr : Alle EW einfach heißt, dass die algebr. Vielf. von jedem EW 1 ist. Jeder EW hat mind. 1 EV, also geom. Vielf. mind. 1. $\Rightarrow$ Algebr. Vielf. = Geometr. Vielf.