

Musterlösungen Blatt 2

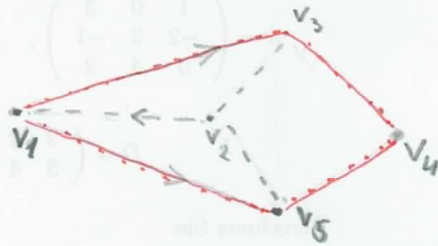
1. Adjazenzmatrix

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Anzahl Wege über n Knoten von v_i nach v_j ist gleich dem Eintrag in der i -ten Zeile und j -ten Spalte von A^n

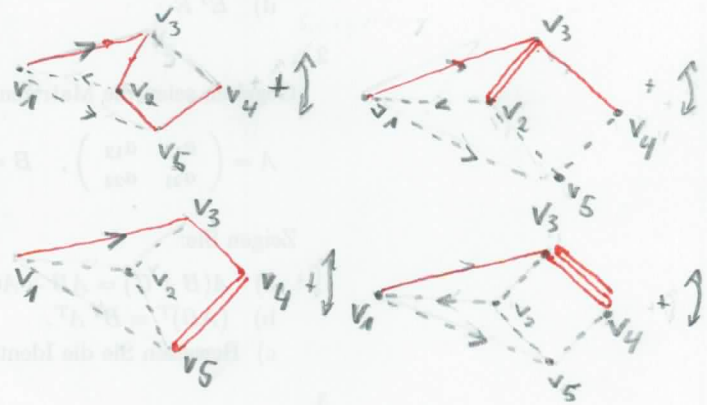
a) $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Antwort: 2 Wege



b) $A^4 = (A^2)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 2 & 8 & 2 \\ 2 & 8 & 6 & 8 & 6 \\ 4 & 2 & 8 & 2 & 8 \\ 0 & 8 & 2 & 8 & 2 \\ 4 & 2 & 8 & 2 & 8 \end{pmatrix}$

Antwort: 8 Wege



c)

$$A^8 = (A^4)^2 = \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots & 136 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & 136 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Antwort: 136 Wege

$$3. \quad A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 3\frac{1}{4} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 3\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Rang } A = 3$$

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 10 & 9 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 10 & 9 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -5 \\ 0 & -2 & -5 \\ 0 & -2 & -5 \\ 0 & -6 & -15 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Rang } B = 2$$

4. a)

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 2 & -1 & 1 & 4 \\ 4 & -5 & 3 & -1 & 2 \\ 3 & -4 & 3 & 1 & 6 \\ 4 & -1 & 3 & 0 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{Zeil}]{\substack{\text{Vertauschen} \\ \text{von 1. und 2.}}} \left(\begin{array}{cccc|c} 4 & -5 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 4 \\ 3 & -4 & 3 & 1 & 6 \\ 4 & -1 & 3 & 0 & -1 \end{array} \right) \begin{array}{l} 3 \text{ Zeile} = \\ 4 \cdot 3. \text{Z.} - 3 \cdot 1. \text{Z.} \\ 4 \text{ Zeile} = \\ 4 \cdot 2. \text{Z.} - 1 \cdot 1. \text{Z.} \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 4 & -5 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 3 & 4 & -6 \\ 0 & 4 & 0 & 1 & -3 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l} 3. \text{ Zeile} = \\ 2 \cdot 3. \text{Z.} + 2. \text{Z.} \\ 4. \text{ Zeile} = \\ 4. \text{Z.} - 2 \cdot 2. \text{Z.} \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 4 & -5 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 15 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -11 \end{array} \right) \begin{array}{l} 4. \text{ Zeile} = \\ 5 \cdot 4. \text{Z.} - 2 \cdot 3. \text{Z.} \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 4 & -5 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 15 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & -35 & -39 \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow x_4 = \frac{39}{35}, \quad x_3 = -\frac{173}{35}, \quad x_2 = -\frac{36}{35}, \quad x_1 = \frac{112}{35} = \frac{16}{5}$$

$$b) \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 5 & -1 & 2 & 2 \\ 3 & -3 & 6 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & 4 & 3 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{3. Zeile}]{\substack{\text{Vertauschen} \\ \text{von 1. und} \\ \text{3. Zeile}}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 4 & 3 & 1 \\ 3 & -3 & 6 & -3 & 2 \\ 2 & 5 & -1 & 2 & 2 \end{array} \right) \begin{array}{l} 2. \text{ Zeile} \\ = 2 \cdot 1. \text{Z.} - 3 \cdot 3. \text{Z.} \\ 3. \text{ Zeile} \\ = 3 \cdot 1. \text{Z.} - 2 \cdot 2. \text{Z.} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & -6 & -6 & -12 & -1 \\ 0 & 3 & -9 & -4 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{3. Zeile}]{\substack{3. \text{ Zeile} \\ = 2 \cdot 3. \text{Z.} + 2. \text{Z.}}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & -6 & -6 & -12 & -1 \\ 0 & 0 & -24 & -20 & -1 \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow x_3 = \frac{1}{24} - \frac{5}{6} x_4$$

d.h. jede Lösung ist von der Form

$$x_2 = \frac{1}{8} - \frac{17}{6} x_4$$

$$x_1 = \frac{17}{24} + \frac{3}{2} x_4$$

$$x = \begin{pmatrix} \frac{17}{24} \\ \frac{1}{8} \\ \frac{1}{24} \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{17}{6} \\ -\frac{5}{6} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$