

1.

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 4 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 4 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 13 & -3 & 0 & 4 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 4 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 13 & -3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 2 & 0 \end{array} \right)$$

$$\rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 4 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 10 & 26 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 2 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 4 & 0 & 0 & -8 & -24 & -4 \\ 0 & 2 & 0 & 10 & 26 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 2 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & -6 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 13 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & 0 \end{array} \right)$$

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & -8 & 0 & 1 & 0 \\ 9 & 6 & 37 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 7 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & 13 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -30 & -26 & -9 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 7 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & 13 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 2 & 1 \end{array} \right)$$

also ist die Matrix  $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ -3 & 3 & -8 \\ 9 & 6 & 37 \end{pmatrix}$  nicht invertierbar.

$$\left( \begin{array}{cc|cc} -2 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & -5 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cc|cc} -2 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cc|cc} -2 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -\frac{5}{2} & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array} \right)$$

2. a) Die Matrix  $M$  muss vollen Rang, d.h. Rang 4, haben.

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} b) \quad & \left( \begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 3 & 4 & 15 \\ 1 & 3 & 0 & 2 & 17 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 22 \\ 2 & 1 & 1 & 6 & 10 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{1.Z \leftrightarrow 2.Z \\ 2.Z}} \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & 2 & 17 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 15 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 22 \\ 2 & 1 & 1 & 6 & 10 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{2.Z - 2 \cdot 1.Z \\ 3.Z - 1.Z \\ 4.Z - 2 \cdot 1.Z}} \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & 2 & 17 \\ 0 & -5 & 3 & 0 & -19 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 5 \\ 0 & -5 & 1 & 2 & -24 \end{array} \right) \\ & \xrightarrow{4.Z - 2 \cdot 3.Z} \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & 2 & 17 \\ 0 & -5 & 3 & 0 & -19 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -5 \end{array} \right) \xrightarrow{4.Z + 3 \cdot 3.Z} \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & 2 & 17 \\ 0 & -5 & 3 & 0 & -19 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \text{Die Preise lassen sich noch nicht berechnen, aber} \end{aligned}$$

c) Setze  $x_1 = \text{Preis A}$ ,  $x_2 = \text{Preis B}$ ,  $x_3 = \text{Preis C}$ ,  $x_4 = \text{Preis D}$ .

$$\text{Dann gilt: } x_3 = \frac{5}{2} + x_4, \quad x_2 = \frac{1}{-5} \left( -19 - \frac{15}{2} - 3x_4 \right) = \frac{53}{10} + \frac{3x_4}{5}, \quad x_1 = 17 - 2x_4 - 3x_2 = \frac{11}{10} - \frac{19}{5}x_4$$

Kunde 5 gibt folgende Information:

$$12 = x_1 + x_3 + 2x_4 = \frac{11}{10} - \frac{19}{5}x_4 + \frac{5}{2} + x_4 + 2x_4 = -\frac{4}{5}x_4 + \frac{18}{5} \Rightarrow$$

$$\underline{x_4 = \frac{49}{2}}, \quad \underline{x_3 = -8}, \quad \underline{x_2 = -1}, \quad \underline{x_1 = 41}$$

$\Rightarrow$  Die Preise lassen sich zwar berechnen, allerdings liefert das Ergebnis darauf schließen, dass mindestens ein Kunde eine falsche Angabe gemacht hat.

3. a)  $1 \cdot \vec{0} + 0 \cdot \vec{a}_1 + \dots + 0 \cdot \vec{a}_m = \vec{0} \Rightarrow \vec{0}, \vec{a}_1, \dots, \vec{a}_m$  sind linear abhängig.

$$b) \vec{0} = \lambda_1 (\alpha_1 \vec{a}_1) + \dots + \lambda_m (\alpha_m \vec{a}_m) = (\lambda_1 \alpha_1) \vec{a}_1 + \dots + (\lambda_m \alpha_m) \vec{a}_m = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \lambda_1 \alpha_1 + \dots + \lambda_m \alpha_m = 0 \Rightarrow \lambda_1, \dots, \lambda_m = 0 \quad \forall$$

c)  $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_m$  l.a.  $\Rightarrow$  Es existieren  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ , nicht alle  $= 0$ , mit

$$\lambda_1 \vec{a}_1 + \dots + \lambda_m \vec{a}_m = \vec{0} \Rightarrow 0 \cdot \vec{b} + \lambda_1 \vec{a}_1 + \dots + \lambda_m \vec{a}_m = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \vec{b}, \vec{a}_1, \dots, \vec{a}_m \text{ l.a.}$$

$\vec{0} = \lambda_1 \vec{a}_1 + \dots + \lambda_m \vec{a}_m = \vec{0}$ , also sind  $\vec{0}, \vec{a}_1, \dots, \vec{a}_m$  linear abhängig.



4. a)  $\lambda_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  - Aus der ersten Zeile folgt  $\lambda_2 = 0$  und somit z.B. aus der zweiten  $\lambda_1 = 0$ .

$\Rightarrow \vec{v}_4$  und  $\vec{v}_5$  sind l.u. (Indirekte Begründung z.B.:  $-\frac{1}{2} \neq \frac{1}{5}$ )

b)  $\begin{pmatrix} 3 & -3 & -12 \\ 5 & 1 & -10 \\ 9 & 6 & -11 \end{pmatrix} \xrightarrow{3 \cdot 2. Z - 5 \cdot 1. Z} \begin{pmatrix} 3 & -3 & -12 \\ 0 & 18 & 30 \\ 0 & 15 & 29 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{5} \cdot 3. Z - \frac{1}{6} \cdot 2. Z} \begin{pmatrix} 3 & -3 & -12 \\ 0 & 18 & 30 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$  sind l.u. und  $\vec{v}_3$  lässt sich schreiben als  $\vec{v}_3 = d_1 \vec{v}_1 + d_2 \vec{v}_2$ .

c) Wegen  $\vec{v}_3 = d_1 \vec{v}_1 + d_2 \vec{v}_2$  ist  $\mathcal{LH}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3) = \mathcal{LH}(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$

Man zeigt:  $\vec{v}_4 = \lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2$ ,  $\vec{v}_5 = \mu_1 \vec{v}_1 + \mu_2 \vec{v}_2$  sind lösbar.

$\begin{pmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \vec{v}_4 & \vec{v}_5 \\ 3 & -3 & 0 & -3 \\ 5 & 1 & 2 & -1 \\ 9 & 6 & 5 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{3 \cdot 2. Z - 5 \cdot 1. Z} \begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 & -3 \\ 0 & 18 & 6 & 12 \\ 0 & 15 & 5 & 10 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{5} \cdot 3. Z - \frac{1}{6} \cdot 2. Z} \begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 & -3 \\ 0 & 18 & 6 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} (*)$

$\Rightarrow \lambda_2 = \frac{1}{3}, \lambda_1 = \frac{1}{3}; \mu_2 = \frac{2}{3}, \mu_1 = -\frac{1}{3}$ , d.h.  $\mathcal{LH}(\vec{v}_4, \vec{v}_5) \subseteq \mathcal{LH}(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = \mathcal{LH}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$

2.  $\vec{v}_4 = \beta_4 \vec{v}_4 + \beta_5 \vec{v}_5$ ,  $\vec{v}_2 = \gamma_4 \vec{v}_4 + \gamma_5 \vec{v}_5$  sind lösbar:

1. liefert  $\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 6 & 12 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_4 \\ \beta_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \beta_5 = -1, \beta_4 = 2$ ,  $\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 6 & 12 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_4 \\ \gamma_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 18 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \gamma_5 = 1, \gamma_4 = 1$

$\Rightarrow \mathcal{LH}(\vec{v}_4, \vec{v}_5) \subseteq \mathcal{LH}(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$

d)  $\vec{v}_3, \vec{v}_4, \vec{v}_5$  sind l.a., da  $\vec{v}_3$  in  $\mathcal{LH}(\vec{v}_4, \vec{v}_5)$  liegt und

somit  $\vec{v}_3 = \lambda_1 \vec{v}_4 + \lambda_2 \vec{v}_5$  für geeignete  $\lambda_1, \lambda_2$ .