$\boxed{\text{Musterlösung Blatt 7}}$

1. a)

$$\begin{array}{cccccc} \vec v_1 & \vec v_2 & \vec v_3 & \vec v_4 & \vec v_5 & \vec v_6 \\ \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 7 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 8 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 3 & 11 & 2 & 8 \\ 4 & 1 & 4 & 14 & 3 & 11 \end{pmatrix} \xrightarrow{} \begin{array}{r} \\ 2.Z-2\cdot 1.Z \\ 3.Z-3\cdot 1.Z \\ 4.Z-4\cdot 1Z \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 7 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -6 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & -3 & -10 & 2 & -4 \\ 0 & -3 & -4 & -14 & 3 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{} \begin{array}{r} \\ \\ 3Z-2\cdot 2.Z \\ 4.Z-3\cdot 2Z \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 7 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -6 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{} \begin{array}{r} \\ \\ \\ 4.Z-2\cdot 3.Z \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 7 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -6 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Die Dimension von $LH(\vec v_1,\dots,\vec v_6)$ ist drei und z.B. $\vec v_1, \vec v_2, \vec v_3$ bilden eine Basis von $LH(\vec v_1,\dots\vec v_6)$

b) $\vec v_7 + LH(\vec v_1,\dots,\vec v_6)$ ist genau dann ein Unterraum, wenn $\vec v_7 \in LH(\vec v_1,\dots,\vec v_6)$ und in diesem Fall ist $\vec v_7 + LH(\vec v_1,\dots,\vec v_6) = LH(\vec v_1, \vec v_2, \vec v_3)$.

Begründung: $\boxed{1.\Rightarrow}$ $\vec v_7 \notin LH(\vec v_1,\dots,\vec v_6) \Rightarrow -\vec v_7 \notin LH(\vec v_1,\dots,\vec v_6) \Rightarrow \vec 0 \notin LH(\vec v_1,\dots,\vec v_6)$.

$\boxed{2.\Leftarrow}$ $\vec v_7 \in LH(\vec v_1,\dots,\vec v_6) \Rightarrow \vec v_7 = \lambda_1 \vec v_1 + \lambda_2 \vec v_2 + \lambda_3 \vec v_3$

$\Rightarrow$ für alle $\vec v = \mu_1 \vec v_1 + \mu_2 \vec v_2 + \mu_3 \vec v_3 \in LH(\vec v_1,\dots,\vec v_6)$ ist

$\vec v_7 + \vec v = (\lambda_1+\mu_1)\vec v_1 + (\lambda_2+\mu_2)\vec v_2 + (\lambda_3+\mu_3)\vec v_3 \in LH(\vec v_1, \vec v_2, \vec v_3)$ und

$\vec v = \vec v_7 + ((\mu_1-\lambda_1)\vec v_1 + (\mu_2-\lambda_2)\vec v_2 + (\mu_3-\lambda_3)\vec v_3)$

2.

$$\left(\begin{array}{ccc:c:c} & & & a) & b) \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{} \begin{array}{r} \\ \\ 2.Z-1.Z \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{ccc:c:c} & & & a) & b) \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 2 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{} \begin{array}{r} \\ \\ \\ 2\cdot 3.Z+2.Z \end{array} \left(\begin{array}{ccc:c:c} & & & a) & b) \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow$ a) Die Dimension des homogenen Lösungsraums ist $3-2=1$ und $x_2 = x_3$, $x_1 = x_3 - 2x_2 = -x_3$. Also ist der homogene Lösungsraum gegeben durch $\lambda\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$, und $\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$ ist eine Basis.

b) Für den inhomogenen Fall erhält man $\begin{cases} -2x_2+2x_3 = -4 \\ x_1+2x_2-x_3 = 3 \end{cases}$. Setze z.B.

$\underline{x_2 = 1}$, und es folgt $\underline{x_3 = -1}$, $\underline{x_1 = 0}$.

c) $\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ ist keine Lösung.

3. $$\left|\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}\right| = -3-8 = \underline{\underline{-11}}$$

$$\left|\begin{pmatrix} -3 & 2 & 3 \\ 3 & -5 & 1 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}\right| \overset{\substack{2.Z+1.Z \\ 3.Z+1.Z}}{=\!=\!=} \left|\begin{pmatrix} -3 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}\right| \overset{3\cdot 3.Z-2.Z}{=\!=\!=\!=} \frac{1}{3}\left|\begin{pmatrix} -3 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}\right| = \underline{\underline{24}}$$

$$\left|\begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -5 & 3 \\ 1 & 0 & -4 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\right| \overset{3.Z \leftrightarrow 1.Z}{=\!=\!=} -1\left|\begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & 5 \\ 2 & 0 & -5 & 3 \\ -3 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}\right| \overset{\substack{2.Z-2\cdot 1.Z \\ 3.Z+3\cdot 1.Z \\ 4.Z-2\cdot 1.Z}}{=\!=\!=} -1\left|\begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & -7 \\ 0 & 1 & -10 & 16 \\ 0 & 1 & 9 & -12 \end{pmatrix}\right|$$

$$\overset{4.Z \leftrightarrow 2.Z}{=\!=\!=} (-1)^2\begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & 5 \\ 0 & 1 & 9 & -12 \\ 0 & 1 & -10 & 16 \\ 0 & 0 & 3 & -7 \end{pmatrix} \overset{3.Z-2.Z}{=\!=\!=} \left|\begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & 5 \\ 0 & 1 & 9 & -12 \\ 0 & 0 & -19 & 28 \\ 0 & 0 & 3 & -7 \end{pmatrix}\right| \overset{\substack{4.Spalte \\ \leftrightarrow \\ 3.Spalte}}{=\!=\!=} (-1)\left|\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & -4 \\ 0 & 1 & -12 & 9 \\ 0 & 0 & 28 & -19 \\ 0 & 0 & -7 & 3 \end{pmatrix}\right|$$

$$= \frac{1}{4}(-1)\left|\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & -4 \\ 0 & 1 & -12 & 9 \\ 0 & 0 & 28 & -19 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \end{pmatrix}\right| = \underline{\underline{49}}$$

$4\cdot 4.Z+3.Z.$

$$\left|\begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 2 & -5 \\ -2 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & -3 \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2} \overset{\substack{3.Z-1.Z \\ 4.Z+1.Z \\ 2\cdot 5.Z-1.Z}}{} \left|\begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & -4 & 2 & 2 & -7 \\ 0 & 9 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 6 & 0 & -8 \end{pmatrix}\right| \overset{\substack{3.Spalte \\ \leftrightarrow 2.Spalte}}{=} -\frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -4 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & 9 & 1 & 2 \\ 0 & 6 & -3 & 0 & -8 \end{pmatrix}\right| \overset{\substack{3.Z+2\cdot 2.Z \\ 5.Z+6\cdot 2.Z}}{=\!=\!=}$$

$$-\frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 9 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 10 \end{pmatrix}\right| \overset{\substack{4.Spalte \\ \leftrightarrow 3.Spalte}}{=} +\frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 10 \end{pmatrix}\right| \overset{2\cdot 4.Z-3.Z}{=\!=\!=} \frac{1}{4}\left|\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 22 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 10 \end{pmatrix}\right|$$

$$\overset{\substack{5.Spalte \\ \leftrightarrow 4.Spalte}}{=\!=} -\frac{1}{4}\left|\begin{matrix} 2 & 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 22 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & -3 \end{matrix}\right| \overset{5.Z-2\cdot 4.Z}{=\!=\!=} -\frac{1}{4}\left|\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 22 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -47 \end{pmatrix}\right| = \underline{\underline{-235}}$$

4. $x_1 = \frac{\left|\begin{pmatrix}-2 & -3\\ 4 & \alpha\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}\alpha & -3\\ 1 & \alpha\end{pmatrix}\right|} = \frac{-2\alpha+12}{\alpha^2+3}$, $x_2 = \frac{\left|\begin{pmatrix}\alpha & -2\\ 1 & 4\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}\alpha & -3\\ 1 & \alpha\end{pmatrix}\right|} = \frac{4\alpha+2}{\alpha^2+3}$

5. $\begin{array}{c}x_1\\ x_2\end{array}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix}$ sind Lösungen von $x_1^2 = x_2$, aber $\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 2\end{pmatrix}$ ist keine Lösung. Also bildet die Menge der Lösungen keinen Unterraum des $\mathbb{R}^2$.