

Musterlösung Blatt 7

1. a)

$$\begin{pmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \vec{v}_3 & \vec{v}_4 & \vec{v}_5 & \vec{v}_6 \\ 1 & 1 & 2 & 7 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 8 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 3 & 11 & 2 & 8 \\ 4 & 1 & 4 & 14 & 3 & 11 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{2.Z.-2 \cdot 1.Z. \\ 3.Z.-3 \cdot 1.Z. \\ 4.Z.-4 \cdot 1.Z.}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 7 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -6 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & -3 & -10 & 2 & -4 \\ 0 & -3 & -4 & -14 & 3 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{3.Z.-2 \cdot 2.Z. \\ 4.Z.-3 \cdot 2.Z.}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 7 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -6 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$\xrightarrow{4.Z.-2 \cdot 3.Z.} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 7 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -6 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ Die Dimension von $\text{LH}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_6)$ ist drei
 \Rightarrow und z.B. $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ bilden eine Basis von $\text{LH}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_6)$

b) $\vec{v}_7 \in \text{LH}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_6)$ ist genau dann ein Unterraum, wenn $\vec{v}_7 \in \text{LH}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_6)$
 und in diesem Fall ist $\vec{v}_7 + \text{LH}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_6) = \text{LH}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$.

Begründung: $\vec{v}_7 \notin \text{LH}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_6) \Rightarrow -\vec{v}_7 \notin \text{LH}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_6) \Rightarrow \vec{0} \notin \text{LH}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_6)$

$\vec{v}_7 \in \text{LH}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_6) \Rightarrow \vec{v}_7 = \lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \lambda_3 \vec{v}_3 \Rightarrow$
 \Rightarrow für alle $\vec{v} = \mu_1 \vec{v}_1 + \mu_2 \vec{v}_2 + \mu_3 \vec{v}_3 \in \text{LH}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_6)$ ist
 $\vec{v}_7 + \vec{v} = (\lambda_1 + \mu_1) \vec{v}_1 + (\lambda_2 + \mu_2) \vec{v}_2 + (\lambda_3 + \mu_3) \vec{v}_3 \in \text{LH}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ und
 $\vec{v} = \vec{v}_7 + ((\mu_1 - \lambda_1) \vec{v}_1 + (\mu_2 - \lambda_2) \vec{v}_2 + (\mu_3 - \lambda_3) \vec{v}_3)$

2. a), b)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{2.Z.-1.Z.} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 2 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{23.Z.+2.Z.} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

\Rightarrow a) Die Dimension des homogenen Lösungsraums ist $3-2=1$ und
 $x_2 = x_3, x_1 = x_3 - 2x_2 = -x_3$. Also ist der homogene Lösungsraum
 gegeben durch $\lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, und $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist eine Basis.

b) Für den inhomogenen Fall erhält man $\begin{cases} 2x_2 + 2x_3 = -4 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 3 \end{cases}$. Setze z.B.
 $x_2 = 1$, und es folgt $x_3 = -1, x_1 = 0$.

c) $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist keine Lösung.

$$3. \quad \left| \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \right| = -3 - 8 = \underline{\underline{-11}}$$

$$\left| \begin{pmatrix} -3 & 2 & 3 \\ 3 & -5 & 1 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix} \right| \stackrel{\substack{2.Z+1.Z \\ 3.Z+1.Z}}{=} \left| \begin{pmatrix} -3 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \right| \stackrel{3 \cdot 3.Z \rightarrow 2.Z}{=} \frac{1}{3} \left| \begin{pmatrix} -3 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \right| = \underline{\underline{24}}$$

$$\left| \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -5 & 3 \\ 1 & 0 & -4 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \right| \stackrel{3.Z \leftrightarrow 1.Z}{=} -1 \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & 5 \\ 2 & 0 & -5 & 3 \\ -3 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \right| \stackrel{\substack{2.Z - 2 \cdot 1.Z \\ 3.Z + 3 \cdot 1.Z \\ 4.Z - 2 \cdot 1.Z}}{=} -1 \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & -7 \\ 0 & 1 & -10 & 16 \\ 0 & 1 & 9 & -12 \end{pmatrix} \right|$$

$$\stackrel{4.Z \leftrightarrow 2.Z}{=} (-1)^2 \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & 5 \\ 0 & 1 & 9 & -12 \\ 0 & 1 & -10 & 16 \\ 0 & 0 & 3 & -7 \end{pmatrix} \right| \stackrel{3.Z - 2.Z}{=} \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & 5 \\ 0 & 1 & 9 & -12 \\ 0 & 0 & -19 & 28 \\ 0 & 0 & 3 & -7 \end{pmatrix} \right| \stackrel{\substack{4. Spalte \\ \leftrightarrow \\ 3. Spalte}}{=} (-1) \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & -4 \\ 0 & 1 & -12 & 9 \\ 0 & 0 & 28 & -19 \\ 0 & 0 & -7 & 3 \end{pmatrix} \right|$$

$$= \frac{1}{4} (-1) \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & -4 \\ 0 & 1 & -12 & 9 \\ 0 & 0 & 28 & -19 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \end{pmatrix} \right| = \underline{\underline{49}}$$

4. 4.Z + 3.Z.

$$\left| \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 2 & -5 \\ -2 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & -3 \end{pmatrix} \right| \stackrel{\substack{3.Z - 1.Z \\ 4.Z + 1.Z \\ 2 \cdot 5.Z - 1.Z}}{=} \frac{1}{2} \left| \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & -4 & 2 & 2 & -7 \\ 0 & 5 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 6 & 0 & -8 \end{pmatrix} \right| \stackrel{\substack{3. Spalte \\ \leftrightarrow 2. Spalte}}{=} -\frac{1}{2} \left| \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -4 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & 9 & 1 & 2 \\ 0 & 6 & -3 & 0 & -8 \end{pmatrix} \right| \stackrel{\substack{3.Z + 2 \cdot 2.Z \\ 5.Z + 6 \cdot 2.Z}}{=} \dots$$

$$\stackrel{-1}{2} \left| \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 9 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 10 \end{pmatrix} \right| \stackrel{\substack{4. Spalte \\ \leftrightarrow 3. Spalte}}{=} +\frac{1}{2} \left| \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 10 \end{pmatrix} \right| \stackrel{2 \cdot 4.Z - 3.Z}{=} \frac{1}{4} \left| \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 22 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 10 \end{pmatrix} \right|$$

$$\stackrel{\substack{5. Spalte \\ \leftrightarrow 4. Spalte}}{=} -\frac{1}{4} \left| \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 22 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & -3 \end{pmatrix} \right| \stackrel{5.Z - 2 \cdot 4.Z}{=} -\frac{1}{4} \left| \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 22 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -47 \end{pmatrix} \right| = \underline{\underline{-235}}$$

4. $x_1 = \frac{\begin{vmatrix} (-2 & -3) \\ 4 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{-2 \cdot 2 + 12}{2^2 + 3}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{4 \cdot 2 + 2}{2^2 + 3}$

5. $x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $x_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sind Lösungen von $x_1^2 = x_2$, aber

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ ist keine Lösung. Also bildet die Menge

der Lösungen keinen Unterraum des \mathbb{R}^2 .

(1 + 1 + 1 + 1 + 1 Punkte)
 Für Matrizen A, B, C, D und Vektoren x, y gelten die Gleichungen $Ax = Bx + Cy$ und $Cx = Dx + Ay$.
 a) Geben Sie die Dimensionen der Nullräume von A, B, C, D an.
 b) Geben Sie die Dimensionen der Nullräume von A, B, C, D an.
 c) Geben Sie die Dimensionen der Nullräume von A, B, C, D an.
 d) Geben Sie die Dimensionen der Nullräume von A, B, C, D an.

	A	B	C	D
Kern A	1	1	1	1
Kern B	1	1	1	1
Kern C	1	1	1	1
Kern D	1	1	1	1

a) Welche Bedingung muss die durch die oben angegebene Matrix definierte Abbildung $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ erfüllen, damit die Nullräume von A, B, C, D gleich sind?
 b) Falls möglich, bestimmen Sie die Dimensionen der Nullräume von A, B, C, D .
 c) Ein Vektor x heißt Nullvektor, falls $Ax = 0$ für ein A aus A, B, C, D gilt. Geben Sie alle Nullvektoren an.
 d) Geben Sie die Dimensionen der Nullräume von A, B, C, D an.

(2 + 2 + 2 + 2 Punkte)
 Geben Sie die Dimensionen der Nullräume von A, B, C, D an.
 a) Die Vektoren v_1, \dots, v_n sind linear unabhängig.
 b) Die Vektoren v_1, \dots, v_n sind linear unabhängig.
 c) Die Vektoren v_1, \dots, v_n sind linear unabhängig.
 d) Die Vektoren v_1, \dots, v_n sind linear unabhängig.

(1 + 1 + 1 + 1 + 1 Punkte)
 Geben Sie die Dimensionen der Nullräume von A, B, C, D an.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = v_1, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = v_2, \quad \begin{pmatrix} -1 \\ -10 \\ -11 \end{pmatrix} = v_3, \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = v_4, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = v_5$$

a) Sind die Vektoren v_1, \dots, v_5 linear unabhängig?
 b) Sind die Vektoren v_1, \dots, v_5 linear unabhängig?
 c) Geben Sie die Dimensionen der Nullräume von A, B, C, D an.
 d) Geben Sie die Dimensionen der Nullräume von A, B, C, D an.