

1. a) $\frac{5}{8} \neq \frac{8}{13} \Rightarrow \vec{v}_4 \text{ und } \vec{v}_5 \text{ sind l. v.}$

$\frac{2}{1} \neq \frac{3}{2} \Rightarrow \vec{v}_1 \text{ und } \vec{v}_2 \text{ sind l. v.}$

b) $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & -5 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 9 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{2.Z - 2 \cdot 1.Z \\ 3.Z - 3 \cdot 1.Z}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & -5 \\ 0 & 5 & 15 \\ 0 & 8 & 24 \end{array} \right) \xrightarrow{\frac{1}{8} \cdot 3.Z - \frac{1}{5} \cdot 2.Z} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & -5 \\ 0 & 5 & 15 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$

$\Rightarrow \underline{\alpha_2 = 3}, \underline{\alpha_1 = -5 + 2 \cdot \alpha_2 = 1}.$

Sei $\vec{v} = \lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \lambda_3 \vec{v}_3 \in \mathcal{LH}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$, dann ist

$\vec{v} = \lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \lambda_3 (\alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2) = (\lambda_1 + \lambda_3 \alpha_1) \vec{v}_1 + (\lambda_2 + \lambda_3 \alpha_2) \vec{v}_2.$

Also $\vec{v} \in \mathcal{LH}(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ und $\mathcal{LH}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3) \subseteq \mathcal{LH}(\vec{v}_1, \vec{v}_2).$

Wegen $\vec{w} = \lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 = \lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + 0 \vec{v}_3 \in \mathcal{LH}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ ist auch $\mathcal{LH}(\vec{v}_1, \vec{v}_2) \subseteq \mathcal{LH}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3).$

c) $\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 5 & 8 \\ 3 & 2 & 8 & 13 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{b)}]{\text{wie in}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 5 & 10 \\ 0 & 8 & 8 & 16 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{b)}]{\text{wie in}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 5 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$

$\Rightarrow \underline{\beta_2 = 1}, \underline{\beta_1 = 2} \text{ und } \underline{\gamma_2 = 2}, \underline{\gamma_1 = -1 + 2\gamma_2 = 3}$

Sei $\vec{v} = \lambda_4 \vec{v}_4 + \lambda_5 \vec{v}_5 \in \mathcal{LH}(\vec{v}_4, \vec{v}_5)$, dann ist

$\vec{v} = \lambda_4 (\beta_1 \vec{v}_1 + \beta_2 \vec{v}_2) + \lambda_5 (\gamma_1 \vec{v}_1 + \gamma_2 \vec{v}_2) = (\lambda_4 \beta_1 + \lambda_5 \gamma_1) \vec{v}_1 + (\lambda_4 \beta_2 + \lambda_5 \gamma_2) \vec{v}_2.$

Also $\vec{v} \in \mathcal{LH}(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ und $\mathcal{LH}(\vec{v}_4, \vec{v}_5) \subseteq \mathcal{LH}(\vec{v}_1, \vec{v}_2).$

d) $\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & -1 & 1 & -2 \\ 5 & 8 & 2 & 1 \\ 8 & 13 & 3 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{in c)}]{\text{wie}} \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & -1 & 1 & -2 \\ 5 & 10 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \beta_5 = -1, \beta_4 = \frac{-10\beta_5}{5} = 2 \text{ und } \gamma_5 = 2, \gamma_4 = \frac{1}{5}(5 - 10\gamma_5) = -3.$

Folgerung wie in c).

$$2. \begin{vmatrix} 8 & 2 & 5 & 4 & 7 \\ 7 & 2 & 2 & 6 & 5 \\ 2 & 2 & 6 & 9 & 8 \\ 4 & 1 & 2 & 2 & 5 \\ 9 & 5 & 7 & 3 & 9 \end{vmatrix} \left(\begin{array}{l} 5 \cdot s_p = 10^4 \cdot 1 \cdot s_p \\ + 10^3 \cdot 2 \cdot s_p + 10^2 \cdot 3 \cdot s_p \\ + 10^1 \cdot 4 \cdot s_p + 5 \cdot s_p \end{array} \right) = \begin{vmatrix} 8 & 2 & 5 & 4 & 82547 \\ 7 & 2 & 2 & 6 & 72265 \\ 2 & 2 & 6 & 9 & 22698 \\ 4 & 1 & 2 & 2 & 41225 \\ 9 & 5 & 7 & 3 & 95739 \end{vmatrix} =$$

$$(-1)^6 \cdot 82547 \cdot A + (-1)^7 \cdot 72265 \cdot B + (-1)^8 \cdot 22698 \cdot C + (-1)^9 \cdot 41225 \cdot D + (-1)^{10} \cdot 95739 \cdot E$$

$$= 97 \cdot a \cdot A - 97 \cdot b \cdot B + 97 \cdot c \cdot C - 97 \cdot d \cdot D + 97 \cdot e \cdot E = 97 \cdot (a \cdot A - b \cdot B + c \cdot C - d \cdot D + e \cdot E)$$

A, B, C, D und E sind die entsprechenden Unterdeterminanten und damit ganze Zahlen ebenso wie $a = \frac{82547}{97}, \dots, e = \frac{95739}{97}$.

$$3. \quad a) \quad (x, y) \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad b) \quad (x, y, z) \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$4. \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \\ 0 & 5 & 6 \end{pmatrix}: \quad \left| \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \right| = -5 < 0 \Rightarrow \text{indefinit (Hauptminoren Kriterium)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -5 \\ -2 & -5 & 14 \end{pmatrix}: \quad 1 > 0, \quad \left| \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \right| = 1 > 0, \quad \left| \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -5 \\ -2 & -5 & 14 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & -3 & 10 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = 1$$

$> 0 \Rightarrow$ positiv definit

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \begin{pmatrix} -4 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = -4x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 - 3x_2^2 - 2x_2x_3 - 4x_2x_4 - x_3^2 - 4x_4^2$$

$$= -(2x_1 - x_2 + \frac{1}{2}x_3)^2 + x_2^2 + x_2x_3 + \frac{1}{4}x_3^2 - 3x_2^2 - 2x_2x_3 - 4x_2x_4 - x_3^2 - 4x_4^2$$

$$= -(2x_1 - x_2 - \frac{1}{2}x_3)^2 - 2x_2^2 - x_2x_3 - \frac{3}{4}x_3^2 - 4x_4^2 = -(2x_1 - x_2 - \frac{1}{2}x_3)^2 - (\sqrt{2}x_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}x_3)^2$$

$$+ \frac{1}{8}x_3^2 - \frac{3}{4}x_3^2 - 4x_4^2 = -(2x_1 - x_2 - \frac{1}{2}x_3)^2 - (\sqrt{2}x_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}x_3)^2 - \frac{5}{8}x_3^2 - 4x_4^2$$

$\Rightarrow$ negativ definit (oder mit Hauptminorenkriterium)

5) Sei $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,m}$. Dann ist

$$(x_1, \dots, x_m) A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = (x_1, \dots, x_m) \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^m a_{1j} x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^m a_{mj} x_j \end{pmatrix} = \sum_{i,j=1}^m a_{ij} x_i x_j = \sum_{i,j=1}^m \frac{(a_{ij} + a_{ji})}{2} x_i x_j$$

$$= (x_1, \dots, x_m) \left(\frac{1}{2} (A + A^T) \right) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \frac{1}{2} (A + A^T) =: B \text{ ist symmetrisch.}$$

Eindeutigkeit: $(0, \dots, \overset{i}{1}, \dots, 0) B \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = b_{ii} \Rightarrow$ Die Einträge (b_{ii}) sind für alle $i=1, \dots, m$ eindeutig bestimmt.

$$(0, \dots, \overset{i}{1}, 0, \dots, 0, \overset{j}{1}, 0, \dots, 0) B \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = b_{ij} + b_{ji} + b_{ii} + b_{jj} \Rightarrow$$

$(b_{ij} + b_{ji})$ ist eindeutig bestimmt und damit wegen der Symmetrie $(b_{ij} = b_{ji})$ ist die gesamte Matrix B .