

1. a) Induktion über n :

$$n=2: \det \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{pmatrix} = x_2 - x_1$$

Induktionsannahme: Die Aussage gilt für $n-1$, $n \geq 3$.

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_m & x_m^2 & \dots & x_m^{n-1} \end{vmatrix} \begin{matrix} i\text{-te Sp.} = i\text{-te Sp.} - x_1 \cdot (i-1)\text{-te Sp.} \\ i = 2, \dots, m \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & (x_2 - x_1) & \dots & (x_2 - x_1)x_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & (x_m - x_1) & \dots & (x_m - x_1)x_m^{n-2} \end{vmatrix}$$

$$\begin{matrix} \text{Entw.} \\ \text{mach} \\ \hline \\ \text{1. Zeile} \end{matrix} \begin{vmatrix} (x_2 - x_1) & \dots & (x_2 - x_1)x_2^{n-2} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (x_m - x_1) & \dots & (x_m - x_1)x_m^{n-2} \end{vmatrix} = \prod_{i=2}^m (x_i - x_1) \begin{vmatrix} 1 & \dots & x_2^{n-2} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & x_m^{n-2} \end{vmatrix}$$

Induktionsann. n

$$= \prod_{i=2}^m (x_i - x_1) \prod_{2 \leq j < i \leq m} (x_i - x_j) = \prod_{1 \leq j < i \leq m} (x_i - x_j)$$

b) Sei $p(x) := a_0 + a_1 x + \dots + a_{n-1} x^{n-1}$. Dann ist $p(x_i) = y_i$, $i = 1, \dots, m$,

genau dann, wenn $\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_m & \dots & x_m^{n-1} \end{pmatrix}}_{=: A} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$ gilt.

Weil die $x_1, \dots, x_m$ paarweise verschieden sind, ist

$$\det A = \prod_{1 \leq j < i \leq m} (x_i - x_j) \neq 0, \text{ also } A \text{ invertierbar; und es}$$

existieren eindeutige $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$, die obiges Gleichungssystem lösen.

2. A positiv definit $\Leftrightarrow$

i) $(1+s) > 0 \Rightarrow s > -1$

ii) $\begin{vmatrix} 1+s & 1-s \\ 1-s & 5+s \end{vmatrix} = (1+s)(5+s) - (1-s)^2 = s^2 + 6s + 5 - s^2 + 2s - 1 = 8s + 4 \stackrel{!}{>} 0$
 $\Rightarrow s > -\frac{1}{2}$

iii) $\begin{vmatrix} 1+s & 1-s & -1 \\ 1-s & 5+s & -3 \\ -1 & -3 & 3-4s^2 \end{vmatrix} \stackrel{\text{Entwicklung nach 3. Zeile}}{=} -1(-3(1-s) + (5+s)) + 3((1+s)(-3) + (1-s)) + (3-4s^2)(8s+4)$
 $= -2 - 4s + 6 - 12s + 12 + 24s - 16s^2 - 32s^3 = 4 + 8s - 16s^2 - 32s^3$
 $= -32(s + \frac{1}{2})(s^2 + \frac{1}{4}) = -32(s + \frac{1}{2})^2(s - \frac{1}{2}) =: d(s)$

Wegen ~~Aus~~ $d(0) = 4$ ist $d(s)$ für $-\frac{1}{2} < s < \frac{1}{2}$ echt positiv
und wegen $d(1) < 0$ für $s \geq \frac{1}{2}$ negativ.

Aus i) ii) und iii) folgt, dass A genau dann positiv definit ist, wenn $-\frac{1}{2} < s < \frac{1}{2}$

3. i) $0 \stackrel{!}{=} f_x = 2xy + 2x + 8z$

ii) $0 \stackrel{!}{=} f_y = 3y^2 + 2y + x^2$

iii) $0 \stackrel{!}{=} f_z = 8x + 8z \Rightarrow \underline{x = -z}$, einsetzen in i)

ergibt $0 = -8zy + \cancel{8z} - \cancel{8z} \Rightarrow z = 0$ oder $y = 0$

1. $y = 0$: eingesetzt in ii) ergibt $x = 0$ und damit $z = 0$.

2. $z = 0$: $\Rightarrow x = 0$, eingesetzt in ii) ergibt

$$0 \stackrel{!}{=} 3y^2 + 2y = y(3y + 2) \Rightarrow y = 0 \text{ oder } y = -\frac{2}{3}$$

Mögliche Extremstellen sind also $x = y = z = 0$ und

$$x = z = 0, y = -\frac{2}{3}$$

Hesse matrix: $H = \begin{pmatrix} 2y+2 & 2x & 8 \\ 2x & 6y+2 & 0 \\ 8 & 0 & 32 \end{pmatrix}$

1. $\boxed{x=y=z=0}$: $H = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 8 \\ 0 & 2 & 0 \\ 8 & 0 & 32 \end{pmatrix}$; die zugehörige quadratische

Form $q(x) = 2x^2 + 16xz + 2y^2 + 32z^2 = 2(x+4z)^2 - 32z^2 + 2y^2 + 32z^2$

ist positiv semidefinit, aber nicht positiv definit; also läßt sich nichts aussagen.

2. $H = \begin{pmatrix} 2/3 & 0 & 8 \\ 0 & -2 & 0 \\ 8 & 0 & 32 \end{pmatrix}$, $\boxed{x=z=0, y=-\frac{2}{3}}$: $\begin{vmatrix} 2/3 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} < 0 \Rightarrow H$ indefinit

$\Rightarrow$ es liegt ein Sattelpunkt vor.

4) $A: \begin{vmatrix} 6-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 3-\lambda & -4 \\ 2 & -4 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (6-\lambda)[(3-\lambda)^2 - 16] - 2[2(3-\lambda) + 8] + 2[-8 - 2(3-\lambda)]$
 $= -\lambda^3 + 12\lambda^2 - 21\lambda - 98 = -(\lambda-7)^2(\lambda+2)$

$\Rightarrow 7$ und -2 sind die Eigenwerte von A

Eigenvektoren: $\boxed{\lambda=7}$ $\begin{pmatrix} 6-7 & 2 & 2 \\ 2 & 3-7 & -4 \\ 2 & -4 & 3-7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & -4 \\ 2 & -4 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ jeder

Eigenvektor zum Eigenwert 7 erfüllt $-4x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0$

$\Rightarrow$ Die Eigenvektoren sind $x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (x_2 oder $x_3 \neq 0$)

$\boxed{\lambda=-2}$ $\begin{pmatrix} 8 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & -4 \\ 2 & -4 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 8 & 2 & 2 \\ 0 & 18 & -18 \\ 0 & -18 & 18 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 8 & 2 & 2 \\ 0 & 18 & -18 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x_2 = x_3, x_1 = -\frac{1}{2}x_3$

$\Rightarrow$ Die Eigenvektoren sind $x_3 \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ($x_3 \neq 0$).

$$B: \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & -1 \\ 1 & 1-\lambda & 3 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(1-\lambda)(2-\lambda)$$

$\Rightarrow$ Die Eigenwerte von B sind 1 und 2.

$$\boxed{\lambda=1}: \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} x_3 = 0 \\ x_2 \text{ beliebig} \\ x_1 = 0 \end{matrix}$$

$\Rightarrow$ Die Eigenvektoren sind $x_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ($x_2 \neq 0$).

$$\boxed{\lambda=2}: \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = -x_3 \\ x_2 = 2x_3 \end{matrix}$$

$\Rightarrow$ Die Eigenvektoren sind $x_3 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ($x_3 \neq 0$).

$$C: \begin{vmatrix} d-\lambda & \beta \\ \beta & d-\lambda \end{vmatrix} = (d-\lambda)^2 - \beta^2 = \lambda^2 - 2d\lambda + d^2 - \beta^2 = (d+\beta-\lambda)(d-\beta-\lambda)$$

$\Rightarrow$ Die Eigenwerte sind $d+\beta$ und $d-\beta$.

$$\boxed{\lambda=d-\beta}: \begin{pmatrix} d-d+\beta & \beta \\ \beta & d-d+\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta & \beta \\ \beta & \beta \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \beta & \beta \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x_1 = -x_2$$

$\Rightarrow$ Die Eigenvektoren sind $x_2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ($x_2 \neq 0$).

$$\boxed{\lambda=d+\beta}: \begin{pmatrix} -\beta & \beta \\ \beta & -\beta \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -\beta & \beta \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x_1 = x_2$$

$\Rightarrow$ Die Eigenvektoren sind $x_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ($x_2 \neq 0$).