Dr. Jochen Glück
Marius Müller
Fabian Rupp
Sommersemester 2017
Punktzahl: 11+ 5*

UNIVERSITÄT ULM

Abgabe: Freitag, 30.06.2017

Lösungsvorschlag Elemente der Funktionalanalysis: Blatt 10

25. Wir wollen in dieser Aufgabe Beispiel 3.1.11 mit Leben füllen. Sei dazu $I = (-1, 1)$ und $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = |x|$. Wir benutzen die Notation von den Beispielen 3.1.6 und 3.1.7.

(a) Es sei $g : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ gegeben durch (2)

$$g(x) := \operatorname{sgn}(x) := \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

Dann gilt $(\tau_f)' = \tau_{[g]}$.

(b) Zeigen Sie auch $(\tau_f)^{(2)} = 2\delta_0$. (2)

(c) Es gibt keine stetige Funktion $h : I \to \mathbb{R}$, sodass $\tau_h = \delta_0$. Genausowenig gibt es ein $h \in L^2(I, \mathbb{K})$, sodass $\tau_{[h]} = \delta_0$. (3)

Hinweis: Die Fälle h stetig auf I und $h \in L^2(I, \mathbb{K})$ müssen tatsächlich einzeln abgehandelt werden. Vielleicht empfiehlt es sich aber doch, letzteren Fall zuerst zu machen.

26. Beweisen Sie Proposition 3.1.10, also folgende Aussage: Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ und $k \in \mathbb{N}_0$. Sei $f : I \to \mathbb{K}$ k-mal stetig differenzierbar. Dann ist stimmt die k-fache distributionelle Ableitung von f mit der k-ten klassischen Ableitung von f überein. Präziser hat man (5)

$$\tau_{f^{(k)}} = (\tau_f)^{(k)}.$$

Hinweis: Wer bei dieser Aufgabe hängt, sollte unbedingt eine E-Mail an marius.mueller@uni-ulm.de schreiben. Es gibt einen einfachen Hinweis, mit dem man das ganze Problem sehr geschickt lösen kann.

27. Es sei μ ein endliches Maß auf der Borel-Sigma-Algebra von $I = [0, 1]$, welche wir im Folgenden mit $\mathcal{B}([0, 1])$ bezeichnen werden. Wir klassifizieren in der folgenden Aufgabe Distibutionen der Gestalt

$$\tau_\mu(\phi) = \int_0^1 \phi \, d\mu \quad (\phi \in \mathcal{D}((0, 1), \mathbb{R}))$$

Beachte, dass einige Distributionen, die wir kennen gelernt haben, von dieser Gestalt sind: Definieren wir für $[f] \in L^2([0, 1], \mathbb{R})$

$$\mu(A) = \int_A f dx, \quad (A \in \mathcal{B}([0, 1]))$$

so gilt $\tau_\mu = \tau_{[f]}$. Falls stattdessen

$$\mu(A) = \begin{cases} 0 & x_0 \notin A \\ 1 & x_0 \in A \end{cases}, \quad A \in \mathcal{B}([0, 1])$$

so gilt $\tau_\mu = \delta_{x_0}$. Das muss nicht gezeigt werden.

(a) Zeigen Sie nun zunächst, dass es sich bei τ_μ tatsächlich um eine Distribution handelt. (1*)

Lösungsvorschlag: Dazu gilt es, Definition 3.1.5. nachzurechnen. Dass τ_μ linear ist folgt unmittelbar aus der Linearität des Integrals. Dazu noch gilt für eine kompakte Menge $K \subset [0, 1]$ und $\phi \in D(I; \mathbb{R})$ so, dass $\phi(x) = 0$ auf $I \setminus K$

$$|\tau_\mu(\phi)| = \left| \int_0^1 \phi d\mu \right| \le \int_0^1 |\phi(x)| d\mu(x) = \int_K |\phi(x)| d\mu(x). \tag{1}$$

Verwenden wir nun die Abschätzung $\phi(x) \le \sup_{y \in K} |\phi(y)|$ für alle $x \in K$ erhalten wir

$$|\tau_\mu(\phi)| \le \mu([0, 1]) \sup_{y \in K} |\phi(y)|, \tag{2}$$

was die Beahuptung zeigt

(b) Zeigen Sie: Falls nun jedes $[f] \in L^2([0,1],\mathbb{R})$ auch μ-integrierber ist und es ein $C > 0$ gibt derart, dass für alle $[f] \in L^2([0,1],\mathbb{R})$ (2*)

$$\left|\int_0^1 f d\mu\right| \le C\sqrt{\int_0^1 f^2\, dx},$$

so gibt es ein $[g] \in L^2([0,1],\mathbb{R})$ sodass

$$\mu(A) = \int_A g\, dx, \quad A \in \mathcal{B}([0,1])$$

und damit $\tau_\mu = \tau_{[g]}$.

Lösungsvorschlag: Nehmen wir zur Kenntnis, dass $H := L^2([0,1],\mathbb{R})$ ein Hilbertraum ist und definieren $T : H \to \mathbb{R}$ durch

$$T([f]) = \int_0^1 f d\mu \tag{3}$$

T ist wohldefiniert denn sind f, g quadratintegrierbar sodass $[f] = [g]$ d.h. $f = g$ Lebesgue fast überall, so ist

$$\left|\int_0^1 (f-g) d\mu\right| \le C\sqrt{\int_0^1 (f-g)^2\, dx} = 0, \tag{4}$$

also gilt $\int_0^1 f d\mu = \int_0^1 g d\mu$ was die Wohldefiniertheit zeigt. Linearität und Beschränktheit folden auch leicht aus der Vorrautssetzung und damit ist $T \in \mathcal{L}(H,\mathbb{R})$. Mit dem Satz von Riesz-Frechet finden wir $[g] \in H$ sodass

$$T([f]) = \int_0^1 g f dx \tag{5}$$

Selbstverständlich gilt aber jetzt $D(I,\mathbb{R}) \subset H$ und deshalb

$$\tau_\mu(\phi) = T([\phi]) = \int g\phi dx, \tag{6}$$

was zu zeigen war.

(c) Wir zeigen nun, dass τ_μ in jedem Falle die Ableitung einer Distribution ist, die durch eine Funktion induziert wird. Definiere dazu für $[f] \in L^2([0,1],\mathbb{R})$ (2*)

$$T([f]) := \int_0^1 \left(\int_0^x f dy\right) d\mu.$$

Zeigen Sie, dass $T \in \mathcal{L}((L^2([0,1],\mathbb{R})),\mathbb{R})$ und folgern Sie, dass es ein $[g] \in L^2([0,1],\mathbb{R})$ gibt so, dass für jedes $\phi \in D((0,1),\mathbb{R})$ gilt:

$$\int \phi\, d\mu = -\int g\phi' dx = \tau'_{[g]}(\phi).$$

Lösungsvorschlag: T ist wohldefiniert, denn sind f, g quadratintegrierbar mit $[f] = [g]$ so hat man für $x \in [0,1]$

$$\int_0^x f(y)dy = \int_0^x g(y)dy. \tag{7}$$

Dass T linear ist folgt auch aus der Linearität. Zur Beschränktheit: Es sei f quadratintegrierbar

$$\int_0^1 \left(\int_0^x f(y)dy\right) d\mu = \int_{[0,1]^2} f(y)\chi_{0\le y\le x\le 1} d(\lambda_y \otimes \mu_x) =: \int_{[0,1]^2} g(x,y) d(\lambda_y \otimes \mu_x). \tag{8}$$

Weil nämlich g integriebar bezüglich $(\lambda_y \otimes \mu_x)$ ist, da mit Tonelli gilt

$$\int_{[0,1]^2} g(x,y) d(\lambda_y \otimes \mu_x) \le \int_{[0,1]^2} f(y) d(\lambda_y \otimes \mu_x) \le \mu([0,1]) \left(\int_0^1 f^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} < \infty. \tag{9}$$

Und jetzt gilt damit aber auch, dass man die Reihenfolge der Integration komplett vertauschen darf und hat:

$$\int_0^1 \left(\int_0^x f(y)dy\right) d\mu = \int_0^1 \int_y^1 d\mu(x)f(y)dy = \int_0^1 \mu([y,1])f(y)dy. \tag{10}$$

Das heißt:

$$|T([f])| \leq \int_0^1 \mu([y,1])|f(y)|dy \leq \mu[0,1] \int |f|dy \leq \mu([0,1])||[f]||_H \tag{11}$$

Das zeigt die Beschränktheit. Mit Riesz-Frechet findet man $[h] \in H$ so, dass

$$T([f]) = \int_0^1 hf dx. \tag{12}$$

Jetzt kann man für $\phi \in D([0,1];\mathbb{R})$ berechnen:

$$T([\phi']) = \int_0^1 h\phi' dx \tag{13}$$

aber auch nach der Definition von T hat man

$$T([\phi']) = \int_0^1 \int_0^x \phi'(y)dyd\mu(x) = \int_0^1 (\phi(x) - \phi(0))d\mu(x) = \int_0^1 \phi(x)d\mu(x) = \tau_\mu(\phi). \tag{14}$$

Damit hat man Alles in Allem

$$\tau_\mu(\phi) = \tau_[h](\phi') = -\tau_{[-h]}(\phi') \tag{15}$$

und das zeigt die Behauptung für $[g] := [-h]$

(d) Wir definieren die Distribution $\tau(\phi) := \phi'(\frac{1}{2})$ für $\phi \in \mathcal{D}((0,1),\mathbb{R})$. Zeige, dass es kein endliches Maß μ gibt mit der Eigenschaft, dass $\tau = \tau_\mu$. (2*)

Lösungsvorschlag: Wäre τ durch ein endliches Maß μ gegeben, so gäbe es $g \in H$ sodass $\tau_\mu(\phi) = -\tau_[g](\phi')$ aber dann gilt für $\phi \in D(I,\mathbb{R})$ dass

$$\phi'\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^1 g\phi' dx \tag{16}$$

Achtung: Man würde jetzt gerne folgern dass $\phi(\frac{1}{2})$ auch stets mit $\int_0^1 g\phi dx$ übereinstimmt, das wäre nämlich ein Widerspruch zu Aufgabe 25c. Wähle nun $\psi \in D(I,\mathbb{R})$ positive Funktion mit Integral $\int_0^1 \psi dx = 1$. Dass es eine solche Funktion gibt verdanken wir Beispiel 3.1.2 und der Tatsache, dass man das Integral über positive Funktionen einfach durch Multiplikation mit einer Konstante normieren kann. Für $\phi \in D(I,\mathbb{R})$ setze

$$i(x) := \int_0^x \phi(s)ds - \int_0^x \psi \int_0^1 \phi(s)ds \tag{17}$$

Nun gilt sicherlich auch $i \in D(I,\mathbb{R})$ denn es gibt $\delta_1, \delta_2 > 0$ sodass $[0,\delta_1], [1-\delta_2, 1] \subset [0,1] \setminus (K_1 \cup K_2)$. Dann ist leicht zu sehen, dass $i(x) = 0$ für $x \in [0,1] \setminus [\delta_1, 1-\delta_2] =: I \setminus K_3$. Nun gilt

$$i'(\frac{1}{2}) = \tau(i) = \int_0^1 g(x)\left(\phi(x) - \psi(x)\int_0^1 \phi(s)ds\right) = \int_0^1 g(x)\phi(x) - \int_0^1 \left(\int_0^1 g(s)\psi(s)ds\right)\phi(x)dx \tag{18}$$

nach Variablenumbenennung im zweiten Integral. Nennen wir $c := \left(\int_0^1 g(s)\psi(s)ds\right)$ so haben wir

$$\phi(\frac{1}{2}) - \int_0^1 \phi(s)ds\psi\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^1 (g-c)(x)\phi(x)dx \tag{19}$$

für alle $\phi \in D([0,1],\mathbb{R}$. Man kann ψ durchaus so wählen dass $\psi(\frac{1}{2}) = 0$ denn falls nicht kann man setzen

$$\widetilde{\psi}(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \psi(x) \tag{20}$$

und damit gibt es ein $c \in \mathbb{R}$ sodass

$$\phi\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^1 (g-c)\phi dx \tag{21}$$

Dann würde aber die Delta-Distribution durch eine Funktion induziert. Ein Widerspruch.