Universität Ulm

Abgabe: Freitag, 14.07.2017

Dr. Jochen Glück
Marius Müller
Fabian Rupp
Sommersemester 2017
Punktzahl: 12+6*

Übungen Elemente der Funktionalanalysis: Blatt 12

28. Es sei V ein normierter Vektorraum über $\mathbb{K}$ und $T \in \mathcal{L}(V,V)$. Wir bezeichnen - wie bereits in der Vorlesung - mit T^n die n-fache Hintereinanderausführung von T wobei wir auch die Konvention $T^0 = I$ treffen.

(a) Es gelte $||T^n|| \to 0$ für $n \to \infty$. Zeigen Sie, dass es ein $\rho \in [0,1)$ und ein $C > 0$ gibt, sodass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $||T^n|| \leq C\rho^n$. (2)

(b) Betrachte $V = C([0,1],\mathbb{R})$ ausgestattet mit der Supremumsnorm. Wir definieren für $\alpha, \beta \in V$ $T : V \to V$ durch (2)

$$T(f)(x) = \alpha(x) \int_0^x \beta(s) f(s) ds$$

Zeigen Sie, dass

$$|T^n(f)(x)| \leq \frac{x^n}{n!} ||a||_\infty^n ||b||_\infty^n ||f||_\infty.$$

Folgern Sie daraus, dass $||T^n|| \leq \frac{||a||_\infty^n ||b||_\infty^n}{n!}$

(c) Wir benutzen die Notation von Teilaufgabe 28b. Zeigen Sie, dass für jedes $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ $S_\lambda := \lambda I - T : V \to V$ invertierbar ist und folgern Sie, dass für jedes $g \in V$ und $\lambda \neq 0$ die Integralgleichung (2)

$$\lambda u(x) = \alpha(s) \int_0^x \beta(s) u(s) ds + g(x)$$

eine eindeutige Lösung $u_g \in V$ besitzt. Sei $(g_n) \subset V$ eine in V gegen g konvergente Folge. Zeigen Sie $(u_{g_n})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert in Supremumsnorm, also in V gegen u_g. Man sagt hierzu, dass u_g stetig von g abhängt.

29. (a) Es sei $I = (0,1)$ und $u \in H^1(I,\mathbb{R})$. Beweise, dass dann für jedes $v \in H_0^1(I,\mathbb{R})$ gilt (2)

$$\int_I u'v \, dx = -\int_I uv' \, dx.$$

(b) Es seien $u_1, u_2 \in C^2(\overline{I})$ und $f \in C(\overline{I})$ sodass (2)

$$RWP(f) \quad \begin{cases} u'' = f \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

Zeige (ohne die Lösung auszurechnen), dass $u_1 = u_2$.
Hinweis: Verwende (a) um zu zeigen, dass $[u_1] = [u_2]$ in $H_0^1(I,\mathbb{R})$.

(c) Es sei $R : C(I,\mathbb{R}) \to H_0^1(I,\mathbb{R})$ definiert als die Abbildung, die f oben auf die H^1-Äquivalenzklasse der Lösung der Gleichung $RWP(f)$ schickt. Zeige, dass R einen linearen stetigen Operator definiert. (2)

(d) In dieser (Bonus-) Aufgabe wollen wir nun endlich ein Randwertproblem lösen, das sich mit der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen nicht in der Allgemeinheit lösen lässt. Es sei f nun Lipschitzstetig so, dass die Lipschitzkonstante kleiner ist als $\frac{1}{C_0}$ wobei C_0 Konstante bei der Poincaré-Ungleichung auf Blatt 11 ist. Definiere R wie oben und $T : H_0^1(I,\mathbb{R}) \to H_0^1(I,\mathbb{R})$ durch $T([u]) = R(f \circ \widetilde{u})$. Wobei hier $\widetilde{u}$ den stetigen Repräsentanten von $[u]$ bezeichne. Wir wollen lösen (3*)

$$(NLRWP) \quad \begin{cases} u'' = f \circ u \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass $u \in H_0^1(I,\mathbb{R})$ genau dann eine Lösung ist, falls $T([u]) = [u]$.
Hinweis: Passen Sie stets gut auf Ihre Regularität auf!

(e) Zeigen Sie, dass es ein $\rho \in [0,1)$ gibt so, dass für $u, v \in H_0^1(I, \mathbb{R})$ stets gilt (2*)

$$||T([u]) - T([v])||_{H_0^1} \leq \rho ||[u] - [v]||_{H_0^1}$$

Wir nennen T damit eine strikte Kontraktion.

(f) Der Banach'sche Fixpunktsatz besagt, dass jede strikte Kontraktion auf einem Banachraum einen eindeutigen Fixpunkt besitzt. Folgern Sie, dass das $(NLRWP)$ genau eine Lösung u in $C^2(I, \mathbb{R})$ besitzt. Zeigen Sie dazu: Wenn $f \in C^k(I, \mathbb{R})$, so ist $u \in C^{k+2}(I, \mathbb{R})$ **Bemerkung:** Man kann zeigen, dass Existenz einer Lösung nicht zu erwarten ist, sofern die Lipschitzkonstante von f zu groß ist! Damit drängt sich die Frage nach der optimalen Konstante bei der Poincaré-Ungleichung auf. (1*)