Universität Ulm

Abgabe: Freitag, 23.06.2017

Dr. Jochen Glück
Marius Müller
Fabian Rupp
Sommersemester 2017
Punktzahl: 11+7*

Lösungsvorschlag Elemente der Funktionalanalysis: Blatt 8

20. Es sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ eine Matrix mit komplexwertigen Einträgen. Wir definieren $T : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ durch $T(x) = Ax$. Geben Sie eine Formel für T^* an und beweisen Sie, dass es sich tatsächlich um T^* handelt. (4)

21. Es sei $k \in C([0,1]^2, \mathbb{C})$ und $T : L^2([0,1], \mathbb{C}) \to L^2([0,1], \mathbb{C})$ definiert durch (2)

$$Tf(x) = \int_0^1 k(x,y)f(y)dy$$

Es muss nicht gezeigt werden, dass $T \in \mathcal{L}(L^2([0,1], \mathbb{C}))$. Geben Sie eine Formel für T^* an und beweisen Sie, dass es sich tatsächlich um T^* handelt.

22. Es sei H ein Prä-Hilbertraum. Zeigen Sie: Ist $P \in \mathcal{L}(H)$ eine orthogonale Projektion, so ist auch die komplementäre Projektion Q eine orthogonale Projektion. (1)

23. (a) Es sei $H = L^2([-\pi,\pi], \mathbb{C})$, $G = span\{f_1, f_2, f_3\}$, wobei $f_1(x) = e^{ix}, f_2(x) = 1, f_3(x) = e^{ix} + e^{-ix}$. Nun sei $f(x) = x^2$. Bestimmen Sie das Proximum von f in G (2)

Lösungsvorschlag: G ist als endlichdimensionaler Vektorraum abgeschlossen, denn G ist selbst sicherlich ein Banachraum und Prop. 1.1.9 liefert deswegen die Abgeschlossenheit. Zunächst bestimmen wir eine Orthonormalbasis von G. Danach werden wir die Formel aus Thm. 2.6.8 (c) benutzen, um die orthogonale Projektion von f auf G zu berechnen. Diese fällt nach Thm. 2.6.8. (b) mit dem Proximum zusammen. Wir orthonormieren jetzt dann mit dem Gram-Schmidt Verfahren:

$$e_1 = \frac{f_1}{||f_1||} = \frac{e^{ix}}{\sqrt{2\pi}}$$

denn $||f_i|| = \sqrt{2\pi}$ für alle $i = 1,2,3$

$$e_2' = f_2 - < f_2, e_1 > e_1 = f_2,$$

denn e_1 und f_2 sind orthogonal

$$e_2 = \frac{f_2}{||f_2||} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

Für e_3 beachte man nicht f_3 nicht orthogonal zu e_1 ist:

$$e_3' = f_3 - < f_3, e_1 > e_1 + < f_3, e_2 > e_2 = f_3 - < e^{ix}, e_1 > e_1 - < e^{-ix}, e_1 > e_1 = f_3 - \sqrt{2\pi}e_1 = e^{-ix}.$$

Und damit ist

$$e_3(x) = \frac{e^{-ix}}{\sqrt{2\pi}}$$

Nun gilt

$$Pf = \sum_{i \in \{1,2,3\}} < e_i, f > e_i.$$

Wir berechnen, dass

$$< e_1, f > = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} \overline{e^{ix}} f(x)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ix}x^2 dx.$$

Zweimaliges partielles Integrieren gibt $< e_1, f > = -2\sqrt{2\pi}$. Analog berechnet man $< e_3, f > = -2\sqrt{2\pi}$ und $< e_2, f > = \frac{\pi^2}{3}\sqrt{2\pi}$. Damit gilt

$$Pf = -2\sqrt{2\pi}e_1 + \frac{\pi^2}{3}\sqrt{2\pi}e_2 - 2\sqrt{2\pi}e_3 = -2e^{ix} - 2e^{-ix} + \frac{\pi^2}{3} = \frac{\pi^2}{3} - 4\cos(x)$$

(b) Es sei H wie oben und $G = \{f \in H : f(-x) = f(x) \text{ fast überall}\}$. Geben Sie eine Abbildungsvorschrift für das Proximum in G an. (2*)

Lösungsvorschlag: Falls G ein abgeschlossener Unterraum ist, so gibt es eine orthogonale Projektion. Es sei nun also $(f_n) \subset G$ konvergent gegen f. Wir definieren $g_n = f_n(-x)$ und $g = f(-x)$. Es ist leich zu zeigen, dass auch g_n gegen g konvergiert. Man kann jetzt den Satz aus der Maßtheorie benutzen, dass (f_n) eine f.ü. punktweise TF haben muss, oder aber man betrachtet

$$\begin{aligned} \int |f(x) - f(-x)|^2 dx &= \int |f(x) - f(-x)|^2 - |f_n(x) - f_n(-x)|^2 \\ &= ||f||^2 + 2Re < f, g > +||g||^2 - (||f_n||^2 - 2Re < f_n, g_n > +||g_n||^2) \\ &\to 0 \quad (n \to \infty) \end{aligned}$$

Denn wie wir in ÜA 14 bewiesen haben ist das Skalarprodukt stetig auf $H \times H$. Damit ist $f(x) - f(-x) = 0$ fast überall und das bedeutet, dass wir $f \in G$ haben. Sei nun $u := f - Pf$. Wir können benutzen, dass u orthogonal auf G stehen muss, um etwas über Pf herauszufinden. Sei $h \in G$.

$$0 = \int_{-\pi}^{\pi} \overline{u(x)} h(x) dx = \int_{-\pi}^{0} \overline{u(x)} h(x) + \int_{0}^{\pi} \overline{u(x)} h(x) dx = \int_{0}^{pi} \overline{u(-x)} h(-x) + \int_{0}^{\pi} \overline{u(x)} h(x) dx$$

Benutzen wir $h(x) = h(-x)$ so erhalten wir

$$0 = \int_{0}^{\pi} \overline{u(x) + u(-x)} h(x) dx \quad \forall h \in G$$

Setzen wir nun $h(x) = u(x) + u(-x)$ so ist $h \in G$ und wir erhalten damit

$$0 = \int_{0}^{\pi} |u(x) + u(-x)|^2 dx$$

Nun gilt also $u(x) = -u(-x)$ für fast alle $x \in [0, \pi]$. Für fast alle $x \in [-\pi, 0]$ gilt dann aber $u(x) = u(-(-x)) = -u(-x)$, weil ja $-x \in [0, \pi]$ und damit ist die Gleichung von vorhin bis auf eine Nullmenge anwendbar. Also ist u ungerade fast überall. Nun gilt:

$$f(x) = Pf(x) + (f - Pf)(x) = Pf(x) + u(x).$$

Dabei handelt es sich um eine Zerlegung von f in eine Summe aus einer geraden und einer ungeraden Funktion. In diesem Fall bekommt man den geraden Anteil so: für fast alle x gilt:

$$f(x) + f(-x) = Pf(x) + u(x) + Pf(-x) + u(-x) = 2Pf(x),$$

also $Pf(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2}$ Das war die Formel, die wir suchten.

(c) Es sei H ein Hilbertraum und $g \in H$ sodass $||g|| = 1$. Sei $G = span(g)$. Geben Sie eine allgemeine Formel für die orthogonale Projektion von f auf G und auf $G^\perp$ an. (2)

24. In dieser (Bonus-)Aufgabe wollen wir die Existenz eines sogenannten bedingten Erwartungswerts zeigen. Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein endlicher Maßraum und $H := L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. Nun sei $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ eine Unter-Sigma-Algebra. Zeigen Sie, dass $G = L^2(\Omega, \mathcal{B}, \mu\,|_{\mathcal{B}})$ ein abgeschlossener Unterraum von H ist(∗). Wenn das getan ist, zeigen Sie, dass zu jedem $f \in H$ ein $g \in G$ existiert sodass (3*)

$$\int_B f d\mu = \int_B g \, d\mu \quad \forall B \in \mathcal{B}.$$

Mit etwas Maßtheorie lässt sich auch die Eindeutigkeit zeigen, wobei Eindeutigkeit hier fast überall zu verstehen ist . Falls $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum ist, so nennt man f Zufallsvariable und $g := \mathbb{E}(f|\mathcal{B})$ den bedingten Erwartungswert von f. Man veranschauliche sich, dass im Falle $\mathcal{B} = \{\Omega, \emptyset\}$ gilt $g(x) = \mathbb{E}(f) := \int f d\mu$ für fast alle $x \in \Omega$.

Hinweis zu (∗): Man kann sich bei diesem Beweis verkünsteln, indem man Resultate aus der Maßtheorie verwendet. Eigentlich aber muss man hier nur Resultate aus der Funktionalanalysis verwenden (und die erforderliche Maßtheorie steckt in diesen bereits drin)

Lösungsvorschlag:

Die Aufgabe müsste eigentlich wie folgt gestellt sein, weil sich ansonsten eine kleine Subtilität ergibt: Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein endlicher Maßraum und $H := L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. Nun sei $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ eine Unter-Sigma-Algebra. Betrachte nun $\widetilde{G} = L^2(\Omega, \mathcal{B}, \mu\mid_{\mathcal{B}})$ und $i : \widetilde{G} \to H$ definiert durch $i([f]_{\mathcal{B}}) = [f]_{\mathcal{A}}$. Zeigen sie, dass i wohldefiniert ist und $\widetilde{G}$ ein abgeschlossener Unterraum von H ist(∗). Wenn das getan ist, zeigen Sie, dass zu jedem $f \in H$ ein $\widetilde{g} \in \widetilde{G}$ existiert sodass

$$\int_B f d\mu = \int_B \widetilde{g}\, d\mu \quad \forall B \in \mathcal{B}.$$

Folgere, dass es ein $g \in G$ gibt, sodass

$$\int_B f d\mu = \int_B g\, d\mu \quad \forall B \in \mathcal{B}.$$

Beweis: Wir zeigen zunächst die Wohldefiniertheit von i. Seien $f_1, f_2 \in G$ sodass $[f_1]_{\mathcal{B}} = [f_2]_{\mathcal{B}}$ Dann gilt, dass $B := \{x \in \Omega : f_1(x) - f_2(x) = 0\}$ eine $\mu_{\mathcal{B}}$-Nullmenge und $\mathcal{B}$-messbar ist. Damit ist B auch $\mathcal{A}$-messbar und eine Nullmenge dort. Man beachte, dass keinesfalls davon ausgegangen werden kann dass i injektiv ist. Jedoch gilt für $f \in G$ stets $||f||_G = ||i(f)||_H$, denn

$$\int_\Omega t d\mu_B = \int_\Omega t d\mu \quad \forall t \in G, t \geq 0 \tag{1}$$

Beweis dazu: Falls $t = \chi_E$ für ein $E \in \mathcal{B}$, so ist die Gleihung einsichtig. Beide Ausdrücke sind linear in t, also bekommt man das ganze für Treppenfunktionen geschenkt. Beide Maße fallen unter die Vorraussetzung des Satzes über monotone Konvergenz und wir wissen, dass wir t stets mit Treppenfunktionen monoton approximieren können. (q.e.d für die Zwischenbehauptung). Nun gilt also insbesondere

$$\int_\Omega |f|^2 d\mu_B = \int_\Omega |f|^2 d\mu$$

Wir behaupten jetzt, dass $\widetilde{G}$ abgeschlossen ist. Dazu zeigen wir, dass $\widetilde{G} \subset H$ Banach ist. Es sei $(f_n) \subset \widetilde{G}$ Cauchy. Wir finden dann $g_n \in G$ sodass $f_n = i(g_n)$. Diese g_n sind nicht μ_B fast überall eindeutig, und das hat mir auch lange Zeit Probleme bereitet, sodass ich zum Schluss kam, die Aufgabe wäre vielleicht komplett nicht mehr zu retten. Wie auch immer: (g_n) sind Cauchy in G, denn

$$||g_n - g_m|| = ||i(g_n - g_m)|| = ||i(g_n) - i(g_m)|| = ||f_n - f_m||.$$

Da jetzt g aber Banach ist, gibt es ein $g \in G$ sodass g_n gegen g konvergiert. Beachte: g ist jetzt B-messbar und

$$0 \leftarrow ||g_n - g|| = ||i(g_n - g)|| = ||f_n - i(g)||$$

Damit konvergiert f_n gegen $i(g)$. Nun ist also $\widetilde{G}$ ein Unterraum von H der selbst Banach ist und als solche abgeschlossen. Nun gibt es also für $f \in H$ eine orthogonale Projektion Pf auf $\widetilde{G}$. Setze $\widetilde{g} = Pf$ und erhalte für $[h]_A \in \widetilde{G}$

$$\int_\Omega \overline{h}(f - \widetilde{g}) d\mu = 0,$$

also

$$\int_\Omega \overline{h} f = \int_\Omega \overline{h}\widetilde{g}.$$

Ist nun $B \in \mathcal{B}$ so hat man für $h = i([\chi_B]_{\mathcal{B}})$, dass

$$\int_B f d\mu = \int_B \widetilde{g} d\mu$$

Für jedes $[g]_{\mathcal{B}}$ in G mit $i([g]) = \widetilde{[g]}$ (und das muss nicht nur eines sein) gilt dann

$$\int_B f d\mu = \int_B g d\mu \quad \forall B \in \mathcal{B}.$$

Zur Eindutigkeit: Hat man $g_1, g_2 \in G$ sodass

$$\int_B f d\mu = \int_B g_1 d\mu = \int_B g_2 d\mu \quad \forall B \in \mathcal{B}$$

so kann man folgern, dass $\int_B (g_1 - g_2) d\mu = \int_B (g_1 - g_2) d\mu_B = 0$. Setzt man $B^* = \{x \in \Omega : g_1(x) - g_2(x) > 0\}$, die wegen der $\mathcal{B}$-messberkeit von g_1, g_2 in $\mathcal{B}$ liegt so merkt man, dass $g_1 - g_2 = 0$ sein muss μ_B-fast überall auf B^*. Dasselbe mit $B^{**} = \{x \in \Omega : g_1(x) - g_2(x) < 0\}$ ergibt schließlich, dass $g_1 = g_2$ μ_B-fast-überall.