Dr. Jochen Glück
Marius Müller
Fabian Rupp
Sommersemester 2017
Punktzahl: 14*+3**

UNIVERSITÄT ULM

Abgabe: Freitag, 21.07.2017

Übungen Elemente der Funktionalanalysis: Blatt 13

31. Es sei $(\lambda_n) \subset \mathbb{C}$ eine beschränkte Folge und $T : \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C}) \to \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ definert durch $T(x) = (\lambda_n x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, sofern $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Es muss nicht gezeigt werden, dass es sich bei T um einen beschränkten linearen Operator handelt. Bestimme das Spektrum von T und dazu noch alle Eigenwerte. (2*)

32. (a) Es sei H ein Hilbertraum und $T : H \to H$ ein beschränkter linearer Operator. Zeigen Sie, dass $\lambda \in \sigma(T)$ genau dann wenn $\overline{\lambda} \in \sigma(T^*)$ (3*)

(b) Es seien $L, R : \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C}) \to \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ definiert durch (2*)

$$L((x_1, x_2, x_3, ...)) = (x_2, x_3, ...),$$

$$R((x_1, x_2, x_3, ...)) = (0, x_1, x_2, x_3, ...).$$

Zeigen Sie, dass $L = R^*$ und $R = L^*$.

(c) Es seien L, R wie in (b). Bestimmen Sie das Spektrum und alle Eigenwerte von L und R. (2*)

(d) Ist L normal ? (1*)

33. In der folgenden Aufgabe befassen wir uns mit dem Spektralradius eines bechränkten linearen Operators T auf einem komplexen Hilbertraum H. Dieser ist definiert durch

$$r(T) := \max\{|\lambda| | \lambda \in \sigma(T)\}.$$

Aus der Numerik kennt man vielleicht die Approximationsformel:

$$r(T) = \lim_{n\to\infty} ||T^n||^{\frac{1}{n}} = \inf_{n\in\mathbb{N}} ||T^n||^{\frac{1}{n}}$$

Wenn nicht, dann findet man Sie auch in dem Buch von Werner, Satz VI.1.6. Sie kann aber im weiteren Verlauf auch sehr gut einfach akzeptiert werden. Übrigens: Die Formel hat auch in Banachräumen ihre Gültigkeit.

Es sei im folgenden $T \in \mathcal{L}(H, H)$ ein selbstadjungierter Operator.

(a) Zeigen Sie, $r(T) = ||T||$ (3*)

(b) Zeigen Sie, dass alle Eigenwerte von T reell sind. (1*)

(c) Zeigen Sie, dass Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten senkrecht aufeinander stehen. (1*)

(d) Zeigen Sie auch, dass alle Spektralwerte reell sind. (3**)