ulm university universität uulm

STUDIENBRIEF

SYSTEMTHEORIE UND REGELUNGSTECHNIK

Weiterbildender Masterstudiengang „Sensorsystemtechnik“
der Fakultät für Ingenieurwissenschaften und Informatik
mit dem Abschluss „Master of Science (M. Sc.)“
an der Universität Ulm

Kürzel / Nummer:	SuR
Englischer Titel:	Systems theory and automatic control
Leistungspunkte:	6 ECTS
Semesterwochenstunden:	3+1 (V/Ü)
Sprache:	Deutsch
Turnus / Dauer:	jedes Wintersemester / 1 Semester
Modulverantwortlicher:	Prof. Dr.-Ing. Knut Graichen
Dozenten:	Dr. Tilman Utz
Einordnung des Moduls in Studiengänge:	Sensorsystemtechnik, M.Sc., Pflichtmodul, Systemtheorie und Regelungstechnik
Voraussetzungen (inhaltlich):	- Grundlagenkenntnisse der höheren Mathematik (insbesondere lineare Algebra) - Beschreibung linearer, zeitinvarianter Systeme (LTI) im Frequenzbereich, Laplace-Transformation, Analyse von LTI-Systemen (Bode-/Nyquist-Diagramm) - Grundlagen der Regelungstechnik im Frequenzbereich, Entwurfsverfahren für lineare zeitinvariante Systeme im Frequenzbereich
Lernziele:	Im Modul werden vertiefte Kenntnisse der Regelungstechnik im Zeitbereich vermittelt. Ziel ist insbesondere die Beherrschung von Methoden zur modellbasierten Regelung von linearen Systemen und in Grundzügen von nichtlinearen Systemen. In zunehmendem Maße verschärfte Anforderungen an Sicherheit, Nachhaltigkeit und Wirtschaftlichkeit technischer Produkte und Produktionsanlagen erfordern den Einsatz moderner automatisierungs- und regelungstechnischer Methoden. Insbesondere im Bereich der Regelungstechnik stoßen einfache und meist heuristisch entworfene Regelungen sehr schnell an ihre Grenzen. Der systematische Entwurf modellbasierter Regelungen im Zeitbereich erlaubt insbesondere auch die Berücksichtigung von Nichtlinearitäten und hat somit das Potential, signifikante Verbesserungen bestehender Regelungsergebnisse zu erzielen. Die dafür notwendigen mathematischen und systemtheoretischen Grundlagen sowie konkrete Entwurfsmethoden werden im Modul vermittelt. Nach Abschluss des Moduls sind die Studierenden in der Lage, lineare zeitkontinuierliche Systeme im Zeitbereich zu untersuchen und entsprechend ihrer systemtheoretischen Eigenschaften einzuordnen. Sie können die wichtigsten Methoden zum Entwurf von Regelungen im Zeitbereich anwenden. Nach Belegung des Moduls kennen die Studierende zudem einige für die Regelung nichtlinearer Systeme geeignete Methoden und beherrschen deren Einsatz.
Inhalt:	- Lineare und nichtlineare zeitkontinuierliche Systeme im Zustandsraum, Linearisierung und allgemeine Lösung linearer Zustandsdifferentialgleichungen - Strukturelle Eigenschaften linearer zeitkontinuierlicher Systeme im Zustandsraum (Stabilität, Steuerbarkeit, Beobachtbarkeit) - Entwurf von Zustandsreglern und Zustandsbeobachtern für lineare Systme - Analyse von nichtlinearen Systemen (Stabilität nach Lyapunov) - Steuerung und Regelung nichtlinearer Systeme
ILIAS:	Optional.

Literatur:	- J. Lunze: Regelungstechnik 1: Systemtheoretische Grundlagen, Analyse und Entwurf einschleifiger Regelungen. 4 Auflage Springer-Verlag, Berlin, 2006 - J. Lunze: Regelungstechnik 2: Mehrgrößensysteme, Digitale Regelung. Springer-Verlag, Berlin, 2004 - T. Kailath: Linear Systems. Prentice Hall, Upper Saddle River, 1980 - W.J. Rugh: Linear System Theory, Prentice Hall, 1996 - H.K. Khalil. Nonlinear Systems. Prentice Hall, Upper Saddle River, 2002 - S. Sastry. Nonlinear Systems. Springer, New York, 1999 - A. Isidori. Nonlinear Control Systems. Springer, Berlin, 3rd edition, 1995
Grundlage für:	
Lehrveranstaltungen und Lehrformen:	Präsenzveranstaltungen: Einführungsveranstaltung: 8 h Vertiefende Übungen: 8 h Seminar zur Prüfungsvorbereitung: 8 h Modulprüfung: 4 h E-Learning: Webinar: 4 h Online-Gruppenarbeit: 60 h Selbststudium: 80 h Chat zur Prüfungsvorbereitung: 8 h
Abschätzung des Arbeitsaufwands:	Vermittlung des Unterrichtsstoffs: 40 h Vor- und Nachbereitung, Übungen, Anwendung: 132 h Sonstiges: 4 h Modulprüfung: 4 h Summe: 180 h
Leistungsnachweis und Prüfungen:	Zur Modulprüfung wird zugelassen, wer die Übungen erfolgreich absolviert hat. Die Modulprüfung erfolgt mündlich.
Voraussetzungen (formal):	keine
Notenbildung:	Die Modulnote ergibt sich aus der Modulprüfung.

INHALTSVERZEICHNIS

1. Dynamische Systeme im Zustandsraum
2. Beschreibung dynamischer Systeme im Zustandsraum
3. Zustandstransformationen und Lösung linearer dynamischer Systeme
4. Strukturelle Eigenschaften linearer Systeme
5. Zustandsregler und Beobachter
6. Lyapunov-basierte Stabilitätsanalyse
7. Regelung nichtlinearer Systeme

1 Dynamische Systeme im Zustandsraum

In dieser Lerneinheit lernen Sie das für diese Vorlesung zentrale Konzept der Systembeschreibung im Zustandsraum kennen. Sie werden sich mit den wichtigsten systemtheoretischen Größen vertraut machen und lernen die Beschreibung dynamischer Systeme mit Hilfe von Zustandsdifferentialgleichungen anhand einiger Beispiele kennen.

1
1:00
11

1.1 Das Konzept des Zustandsraums

System

Der Begriff System wird in vielen Bereichen der Wissenschaft und des täglichen Lebens verwendet, wobei im Detail häufig unterschiedliche Dinge darunter verstanden werden. Wenn ein System zunächst als eine *Black Box* betrachtet wird, so wird die Wechselwirkung mit der Umgebung durch sogenannte *Eingangs-* bzw. *Ausgangsgrößen* beschrieben (siehe Abbildung 1.1):

- *Eingangsgrößen* $u_1, u_2, \dots, u_m$ wirken von der Umgebung auf das System ein. Beeinflussbare Eingangsgrößen dienen in der Regelungstechnik als *Stellgrößen* (im Gegensatz zu nicht beeinflussbaren *Störgrößen*).
- *Ausgangsgrößen* $y_1, y_2, \dots, y_p$ werden vom System erzeugt und beeinflussen die Umgebung. Ausgangsgrößen, die über Sensoren gemessen werden können, bezeichnet man als *Messgrößen*.

statisch
dynamisch
zeitkontinuierlich
zeitdiskret

In dieser Vorlesung beschäftigen wir uns hauptsächlich mit zeitkontinuierlichen Systemen. Im Gegensatz zu zeitdiskreten Systemen werden dabei die Ein- und Ausgangsgrößen als Zeitfunktionen betrachtet und nicht als Folge diskreter Werte.
Wenn man nun ein Zeitintervall $[t_0, t_1]$ betrachtet, so stellt sich die Frage, ob und in welcher Weise sich das Ausgangsverhalten in diesem Zeitraum durch die Eingangsverläufe beschreiben lässt. Diese Frage führt auf die Unterscheidung zwischen *statischen* und *dynamischen Systemen*.

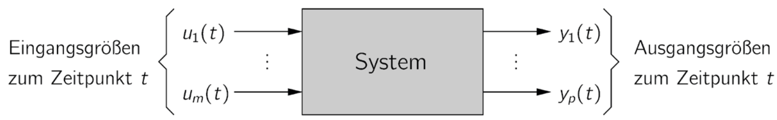


Abbildung 1.1: Systemdarstellung mit Ein- und Ausgangsgrößen.

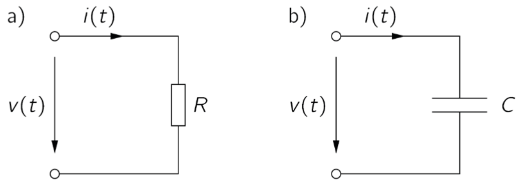


Abbildung 1.2: Beispiel zu statischen und dynamischen Systemen (Beispiel 1.1).

Beispiel 1.1. *In Abbildung 1.2 a) und b) sind zwei einfache elektrische Systeme mit einem Widerstand bzw. einem idealen Kondensator sowie der Eingangsgröße $i(t)$ (Strom) und der Ausgangsgröße $u(t)$ (Spannung) dargestellt.*

Im Fall a) gilt für den Widerstand R der Zusammenhang

$$v(t) = Ri(t)\,. \tag{1.1}$$

Die Ausgangsgröße $v(t)$ ist zu jedem Zeitpunkt t eindeutig durch die Eingangsgröße $i(t)$ bestimmt. Statt dessen gilt im Fall b) für die Spannung $v(t)$ über dem Kondensator C

$$v(t) = v_0 + \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i(\tau)\,\mathrm{d}\tau\,. \tag{1.2}$$

Im Gegensatz zu (1.1) ist die Ausgangsgröße $v(t)$ also abhängig von der Spannung $v_0 = v(t_0)$ zum Startzeitpunkt t_0 sowie vom Verlauf des Eingangsstroms $i(\tau)$ für $t_0 \leq \tau < t$.

statisches und dynamisches System

Anhand von Beispiel 1.1 lässt sich der Unterschied zwischen einem statischen und einem dynamischen System wie folgt beschreiben:

- *Statisches System*: die Ausgangsgrößen $y_1(t), \ldots, y_p(t)$ zum Zeitpunkt t hängen lediglich von den momentanen Eingangsgrößen $u_1(t), \ldots, u_m(t)$ ab,
- *Dynamisches System*: die Ausgangsgrößen $y_1(t), \ldots, y_p(t)$ zum Zeitpunkt t hängen von der Anfangssituation zu einem Zeitpunkt t_0 und der Historie der Eingangsgrößen $u_1(\tau), \ldots u_m(\tau)$ für $t_0 \leq \tau$ ab. Gilt außerdem , dass $\tau \leq t$, so spricht man auch von einem *kausalen* dynamischen System.

Frage 1.1. *Wie wird eine Eingangsgröße bezeichnet, die gezielt beeinflusst werden kann?*

Zustand

Der oben genannte Begriff der "Anfangssituation" ist eng verknüpft mit der Definition der Zustandsgrößen eines dynamischen Systems:

Definition 1.1 (Zustand)**.** *Die Größen $x_1, \ldots, x_n$ heißen* Zustandsgrößen *eines dynamischen Systems, wenn sich die Ausgangsgrößen $y_1(t), \ldots, y_p(t)$ zu jedem beliebigen Zeitpunkt $t \geq t_0$ durch die Historie*

3 Zustandstransformationen und Lösung linearer dynamischer Systeme

In dieser Lerneinheit wiederholen Sie zunächst einige grundlegende Konzepte der linearen Algebra, die für die nachfolgend eingeführten regulären Zustandstransformationen benötigt werden. Daraufhin lernen Sie, wie Sie allgemeine lineare zeitinvariante Systeme in Zustandsraumdarstellung lösen.

3.1 Einige Eigenschaften von Matrizen

Einleitend werden einige Begriffe und Konzepte der linearen Algebra kurz wiederholt. Dies soll auch der Einführung des im weiteren Verlauf des Skripts verwendeten Notation dienen.

In dieser Lerneinheit werden verschiedene Definitionen wiederholt, die für diese Vorlesung wichtig sind und als bekannt vorausgesetzt werden: Eigenwert, Vielfachheit von Eigenwerten, Eigenvektor und induzierte Matrixnorm. Diese Werte sollten Sie für eine gegebene Matrix berechnen können.

1
0:30
2

Eigenwerte

Die Eigenwerte einer (quadratischen) $n \times n$ Matrix $\boldsymbol{A}$ sind die skalaren Größen λ_i, $i = 1, \ldots, n$, die eine nicht-triviale Lösung $\boldsymbol{x} \neq 0$ der Gleichung

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}$$

darstellen. Das charakteristische Polynom der Matrix $\boldsymbol{A}$ ist gegeben durch $\det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I})$ und ist ein Polynom n-ter Ordnung, dessen Nullstellen die Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sind.

Aufgabe 3.1. *Berechnen Sie die Eigenwerte der folgenden Matrix:*

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & -4 & 3 \end{bmatrix}$$

algebraische und geometrische Vielfachheit

Um von der obigen Annahme der einfachen Eigenwerte abzurücken, sei in Erinnerung gerufen, was algebraische und geometrische Vielfachheit bedeutet: das *charakteristische Polynom* $\det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}) = 0$ der Matrix $\boldsymbol{A}$ habe m verschiedene Wurzeln $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{C}$ mit den entsprechenden Vielfachheiten $n_1, \ldots, n_m$. Dann gelten folgende Bezeichnungen:

- n_i ist die *algebraische Vielfachheit* des Eigenwertes λ_i, also die Vielfachheit der Nullstelle λ_i des charakteristischen Polynoms $p(\lambda) = \det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}) = 0$.
- g_i ist die *geometrische Vielfachheit* des Eigenwertes λ_i, also die Dimension des Eigenraums von λ_i, d.h.

  $$g_i = \dim\left(\text{Kern}\left(\boldsymbol{A} - \lambda_i \boldsymbol{I}\right)\right) \quad \text{bzw.} \quad g_i = n - \text{Rang}(\boldsymbol{A} - \lambda_i \boldsymbol{I})\,. \tag{3.1}$$

  Dabei gilt stets $1 \leq g_i \leq n_i$.

Interessant ist in diesem Zusammenhang auch der folgende Satz

Satz von Cayley-Hamilton

Satz 3.1 (Satz von Cayley-Hamilton)**.** *Bezeichnet*

$$p(\lambda) = p_0 + p_1\lambda + \cdots + p_{n-1}\lambda^{n-1} + \lambda^n$$

das charakteristische Polynom der Matrix $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$*, so genügt* $\boldsymbol{A}$ *der Beziehung*

$$p(\boldsymbol{A}) = p_0\boldsymbol{I} + p_1\boldsymbol{A} + \ldots + p_{n-1}\boldsymbol{A}^{n-1} + \boldsymbol{A}^n = 0\,. \tag{3.2}$$

Der Satz von Cayley-Hamilton besagt, dass die Matrix $\boldsymbol{A}^n$ durch eine Linearkombination der niedrigeren Potenzen ausgedrückt werden kann, bei der die Koeffizienten denen des charakteristischen Polynoms entsprechen.

Frage 3.1. *In welchem Zusammenhang stehen das charakteristische Polynom und die Eigenwerte eines Systems?*

Eigenvektor

Zu jedem Eigenwert λ_i existiert ein von Null verschiedener Eigenvektor, der durch

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}_i = \lambda_i \boldsymbol{v}_i\,, \quad i = 1, \ldots, n$$

definiert ist. Zu unterschiedlichen Eigenwerten gehörige Eigenvektoren sind linear unabhängig, d.h., sie bilden eine Basis des Bildraums der durch die Anwendung der Matrix $\boldsymbol{A}$ auf einen Vektor $\boldsymbol{x}$ definierten linearen Abbildung.

Aufgabe 3.2. *Berechnen Sie die zu den Eigenwerten aus Aufgabe 3.1 gehörigen Eigenvektoren.*

Die Norm eines Vektors wird gemeinhin als ein Maß für seine Länge interpretiert. Dies drückt sich in der am häufigsten gebräuchlichen, der Euklidischen Vektornorm $||\boldsymbol{x}||_2 = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$ aus. Entsprechend kann auch eine Norm für Matrizen definiert werden, die im Fall der sogenannten induzierten Norm immer von einer Vektornorm abgeleitet ist:

Induzierte Matrixnorm

Definition 3.1 (Induzierte Matrixnorm)**.** *Die induzierte Norm einer Matrix* $\boldsymbol{A}$ *wird durch* $||\boldsymbol{A}||$ *bezeichnet und definiert den kleinsten Wert* κ *so dass* $||\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}|| \leq \kappa||\boldsymbol{x}||$.

Da es zu jedem Vektor $\boldsymbol{x}$ auch einen auf eins normierten Vektor gibt, genügt es ebenso, das Maximum über alle Einheitsvektoren mit $||\boldsymbol{x}|| = 1$ zu betrachten. Beispielsweise gilt bei Verwendung der Euklidischen Vektornorm $||\cdot||_2$ unter unter der Annahme, dass $\boldsymbol{A}$ reellwertig ist, für die induzierte Matrixnorm $||\boldsymbol{A}||_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(\boldsymbol{A}^\mathsf{T}\boldsymbol{A})}$.

5 Zustandsregler und Beobachter

In der folgenden Lerneinheit lernen Sie den Entwurf statischer Zustandsregler und -beobachter kennen. Insbesondere wissen Sie, wie Sie die Eigenwerte des geschlossenen Regelkreises mit oder ohne Beobachter gezielt vorgeben können. Des Weiteren beherrschen Sie die Anwendung von Methoden zur Behandlung von Störgrößen.

5.1 Zustandsreglerentwurf

In dieser Lerneinheit lernen Sie das Konzept des Zustandsreglers mit einem stationären Vorfilter kennen. Ihnen werden zwei Methoden zur Platzierung der Eigenwerte des geschlossenen Kreises vorgestellt, und zwar die Polvorgabe durch Koeffizientenvergleich und die Ackermann-Formel. Ziel der Lerneinheit ist, dass sie für ein gegebenes System einen Zustandsregler aufstellen und die Eigenwerte des Gesamtsystems sinnvoll platzieren können.

3
2:00
7,5

Zustandsregler

Setzt man voraus, dass der gesamte Zustand eines Systems messtechnisch erfassbar ist, dann ist es möglich, einen so genannten *Zustandsregler* zu entwerfen. Unter einem linearen Zustandsregelgesetz versteht man dabei eine statische, lineare Abhängigkeit der Stellgröße $\boldsymbol{u}$ von den Zustandsgrößen $\boldsymbol{x}$ und Führungsgrößen $\boldsymbol{w}$

$$\boldsymbol{u} = -\boldsymbol{K}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{S}\boldsymbol{w}\,, \tag{5.1}$$

mit der Rückführmatrix $\boldsymbol{K} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und der Vorfiltermatrix $\boldsymbol{S} \in \mathbb{R}^{m\times p}$. Der komplette Regelkreis ist in Abbildung 5.1 dargestellt.

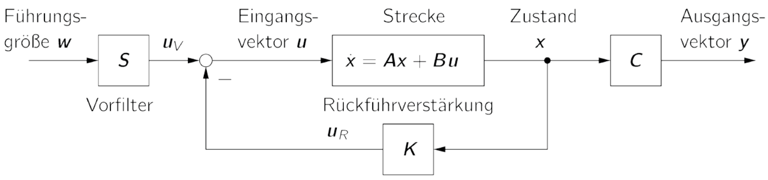


Abbildung 5.1: Zustandsregler (Mehrgrößenfall $m, p \geq 1$).

In den folgenden Betrachtungen wird ein lineares Mehrgrößensystem mit dem Eingangsvektor $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^m$ und ohne Durchgriff ($\boldsymbol{D} = 0$) im Ausgangsvektor $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^p$ betrachtet

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \boldsymbol{A}x + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}\,, \quad x(0) = x_0 \\ \boldsymbol{y} &= \boldsymbol{C}x\,. \end{aligned} \tag{5.2}$$

Beim Auslegen eines Zustandsreglers sind insbesondere die folgenden regelungstechnischen Ziele von Interesse:

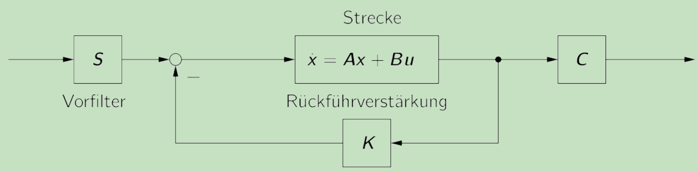
(a) Stabilität des geregelten Systems
(b) Verbesserung des Eingangs-/Ausgangsverhaltens
(c) Erhöhung der Dämpfung
(d) Erzielung eines verbesserten transienten Verhaltens
(e) Kompensation von Störungen
(f) Genaue Führungsgrößenfolge.

Insbesondere im Hinblick auf Punkt (a) soll die Reglermatrix $\boldsymbol{K}$ so ausgelegt werden, dass der geschlossene Kreis

$$\dot{x} = \boldsymbol{A}x + \boldsymbol{B}(-\boldsymbol{K}x + \boldsymbol{S}w) = (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{BK})x + \boldsymbol{BS}w \tag{5.3}$$

asymptotisch stabil ist, die Eigenwerte λ_i der Matrix $(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{BK})$ also in der linken Halbebene liegen.

Frage 5.1. *Beschriften Sie die Signale in folgendem Blockschaltbild, das ein System mit Zustandsregler und Vorfilter darstellt.*



Frage 5.2. *Nennen Sie drei Ziele, die beim Zustandsreglerentwurf verfolgt werden.*

5.1.1 Eigenwertvorgabe im Eingrößenfall

Eigenwert- bzw. Polvorgabe

Der Grundgedanke der Eigenwert- bzw. Polvorgabe besteht darin, die Eigenwerte des geschlossenen Kreises (5.3) vorzugeben, um z.B. eine gewünschte Dynamik zu erzielen. In diesem Abschnitt wird ein lineares System mit skalarer Stellgröße u

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \boldsymbol{A}x + \boldsymbol{b}u\,, \quad x(0) = x_0 \\ y &= \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}x\,. \end{aligned} \tag{5.4}$$

betrachtet. Setzt man nun das Zustandsregelgesetz

$$u = -\boldsymbol{k}^{\mathrm{T}}x + Sw \tag{5.5}$$

an und geht in einem ersten Schritt von $w(t) = 0$ aus, so wird beim Reglerentwurf durch Polvorgabe die Reglerverstärkung $\boldsymbol{k}^{\mathrm{T}}$ so gewählt, dass die Matrix $\boldsymbol{A}_R$ des geschlossenen Kreises

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \underbrace{(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{bk}^{\mathrm{T}})}_{\boldsymbol{A}_R}x + \underbrace{S\boldsymbol{b}w}_{=0}\,, \quad x(0) = x_0 \\ y &= \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}x\,. \end{aligned} \tag{5.6}$$

die gewünschten Eigenwerte λ_i^*, $i = 1, \ldots, n$ besitzt.

7 Regelung nichtlinearer Systeme

Aufgrund der Komplexität und der Vielfalt nichtlinearer Systeme kann nicht erwartet werden, dass die Kenntnis eines einzigen Entwurfsverfahrens ausreicht, um den ebenso vielfältigen Anforderung an Regelgüte und Robustheit zu genügen. Stattdessen lernen Sie in der folgenden Lerneinheit einige praxisrelevante Werkzeugen zur Analyse nichtlinearer Systeme und zum Entwurf entsprechender Regelungen kennen, mit denen Sie viele Probleme behandeln können.

7.1 Gain Scheduling

In dieser Lerneinheit lernen Sie das Konzept des Reglerentwurfs durch Linearisierung und seine Anwendung für den Entwurf von Gain-Scheduling-Reglern kennen. Sie lernen außerdem den Unterschied zwischen lokaler und globaler Stabilisierung und wie diese Konzepte beim Gain-Scheduling-Entwurf berücksichtigt werden. Am Ende der Lerneinheit sollen Sie in der Lage sein, einen Zustandsregler durch Linearisierung um einen Arbeitspunkt sowie einen Gain-Scheduling Regler zu entwerfen.

4
1:00
6

Reglerentwurf durch Linearisierung um Ruhelage

Eine sehr gängige und im Normalfall einfach zu realisierende Möglichkeit des Reglerentwurfs für ein nichtlineares System

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{x}} &= \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) , \quad \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0 \\ \boldsymbol{y} &= \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}) \end{aligned} \tag{7.1}$$

basiert auf der Linearisierung um eine Ruhelage. Im Folgenden wird vorerst angenommen, dass der Ursprung eine Ruhelage des Systems (7.1) ist, also $\boldsymbol{f}(0,0) = 0$ gilt und dass das linearisierte System

$$\begin{aligned} &\Delta\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\Delta\boldsymbol{u} \\ \text{mit} \quad &\boldsymbol{A} = \left.\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}}\right|_{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})=(0,0)} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{B} = \left.\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{u}}\right|_{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})=(0,0)} \end{aligned} \tag{7.2}$$

vollständig steuerbar ist, also die Steuerbarkeitsmatrix

$$\boldsymbol{Q}_S = \begin{bmatrix} \boldsymbol{B} & \boldsymbol{A}\boldsymbol{B} & \dots & \boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{B} \end{bmatrix}$$

den Rang n besitzt. Mithilfe der indirekten Methode von Lyapunov (Satz 6.6) lässt sich dann sogar ein Stabilitätsresultat wie folgt angeben:

Satz 7.1 (Lineares Regelgesetz für nichtlineare Systeme). *Das nichtlineare System* (7.1) *mit* $\boldsymbol{f}(0,0) = 0$ *besitze eine vollständig steuerbare Linearisierung* (7.2). *Des Weiteren sei* $\boldsymbol{K} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ *so gewählt, dass sämtliche Eigenwerte* λ_i *von* $(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{BK})$ *die Bedingung* $\mathrm{Re}(\lambda_i) < 0$ *erfüllen. Dann stabilisiert das lineare Regelgesetz*

$$\boldsymbol{u} = -\boldsymbol{K}\boldsymbol{x} \tag{7.3}$$

den Ursprung $\boldsymbol{x}_R = 0$ *asymptotisch.*

Lineares Regelgesetz für nichtlineare Systeme

Beweis: Die Verwendung des linearen Regelgesetzes (7.3) führt auf das freie nichtlineare System

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, -\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}) = \tilde{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{x}) \tag{7.4}$$

mit der Ruhelage $\boldsymbol{x}_R = 0$, d.h. $\tilde{\boldsymbol{f}}(0) = 0$, und der Jacobi-Matrix

$$\tilde{\boldsymbol{A}} = \left.\frac{\partial \tilde{\boldsymbol{f}}}{\partial \boldsymbol{x}}\right|_{\boldsymbol{x}=0} = \boldsymbol{A} - \boldsymbol{BK}\,.$$

Da die Reglermatrix $\boldsymbol{K}$ so gewählt wurde, dass alle Eigenwerte der Matrix $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{BK}$ negativen Realteil besitzen, folgt mit Hilfe der indirekten Methode von Lyapunov (Satz 6.6), dass der Ursprung $\boldsymbol{x}_R = 0$ des geregelten nichtlinearen Systems (7.4) asymptotisch stabil ist. ■

Es sei angemerkt, und dies schränkt die Anwendbarkeit der Methodik bis hierhin weitgehend ein, dass Satz 7.1 lediglich die Stabilität des Ursprungs garantiert, aber keine Aussage über den Einzugsbereich um den Ursprung trifft, für den das geregelte System stabil ist!

Gain Scheduling

Mit der Methodik des Gain Scheduling (etwa: Geplante Reglerverstärkung) kann der Gültigkeitsbereich des Linearisierungsansatzes auf eine gewisse Menge von Ruhelagen erweitert werden. Gain Scheduling wird daher auch vor allem dort eingesetzt, wo sich die Dynamik eines Systems stark ändern kann. Kann dabei eine sogenannte Planungsvariable (engl: scheduling variable) so gefunden werden, dass die Ruhelagen durch diese Größe parametriert werden, so kann wie folgt vorgegangen werden: Das System wird in verschiedenen Ruhelagen linearisiert und jeweils ein geeigneter linearer Regler entworfen. Die erhaltene Familie linearer Regler wird als ein einziger Regler implementiert, dessen Parameter entsprechend der Planungsvariable geändert werden.

Frage 7.1. *Warum ist die Anwendbarkeit der Methode des Reglerentwurfs durch Linearisierung sehr eingeschränkt?*

7.1.1 Parametrierung linearer Regler

Planungsvariable

Betrachtet werden in der Folge nichtlineare Systeme (7.1) mit der Ruhelage bzw. dem Arbeitspunkt $(\boldsymbol{x}_R, \boldsymbol{u}_R)$, für die $0 = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_R, \boldsymbol{u}_R)$ gilt. Außerdem wird die sogenannte Planungsvariable σ eingeführt. Diese soll sich dadurch auszeichnen, dass sie eine messbare Größe ist, d. h., $\sigma = g(\boldsymbol{y})$, und dass sie die Ruhelagen parametriert, d. h., $\boldsymbol{x}_R = \boldsymbol{x}_R(\sigma)$, $\boldsymbol{u}_R = \boldsymbol{u}_R(\sigma)$. Zu beachten

Mod:Master
Sensorsystemtechnik

Ansprechpartner

Dr. Gabriele Gröger
Albert-Einstein-Allee 45
89081 Ulm

Tel 0049 731 – 5 03 24 00
Fax 0049 731 – 5 03 24 09

gabriele.groeger@uni-ulm.de
www.uni-ulm.de/saps

Postanschrift

Universität Ulm
School of Advanced Professional Studies
Albert-Einstein-Allee 45
89081 Ulm

Das Studienangebot „Sensorsystemtechnik“ wurde entwickelt im Projekt Mod:Master, das aus Mitteln des Bundesministeriums für Bildung und Forschung gefördert und aus dem Europäischen Sozialfonds der Europäischen Union kofinanziert wird (Förderkennzeichen: 16OH11027, Projektnummer WOH11012). Dabei handelt es sich um ein Vorhaben im Programm „Aufstieg durch Bildung: offene Hochschulen“.

AUFSTIEG DURCH BILDUNG OFFENE HOCHSCHULEN

EUROPÄISCHE UNION

ESF Europäischer Sozialfonds für Deutschland

GEFÖRDERT VOM
Bundesministerium für Bildung und Forschung