Grundlagen der Physik II Sommersemester 2005 Blatt 5
Besprechung am 9. & 12. Mai

1. Zeigen Sie, dass unter gewissen Bedingungen $\vec{s}(\vec{x},t) = \vec{f}(\omega t + \vec{k}\vec{x}) + \vec{g}(\omega t - \vec{k}\vec{x})$ die allgemeinste Lösung der Wellengleichung $\left(\triangle - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\vec{s}(\vec{x},t) = 0$ (*d' Alembertsche Lösung*)ist. Wie lauten diese Bedingungen an $\vec{f}, \vec{g}, \omega \ldots$?

2. Wellen müssen keinesfalls periodisch sein. Zeigen Sie für den eindimensionalen Fall, wie sich die Störung $s(x,t=0) = \exp(-x^2)$ mit $\frac{\partial}{\partial t}s(x,t=0) = 0$ ausbreitet. Dies sind die Anfangsbedingungen für das 'Zupfen' einer unendlich langen Saite, die 'glockenförmig' ausgelenkt und aus der Ruhe losgelassen wird.
   Hinweis: Versuchen Sie Funktionen $f(\xi)$ und $g(\xi)$ so zu bestimmen, dass $s(\xi) = f(\xi) + g(\xi) = \exp(-\xi^2)$ und $s'(\xi) = f'(\xi) - g'(\xi) = 0$ erfüllt ist. Warum steht in der letzten Gleichung ein $'-'$?

3. Eine Welle bewegt sich. Was bewegt sich genau? Wird Materie verschoben? Wenn ja, wie? Beschreiben Sie anhand der Wellentypen, die auf nachstehender Webpage vorgestellt werden, wie sich die unterschiedlichen Wellen ausbreiten, was sich dabei bewegt, und was dabei verschoben wird.
   Link: *http://www.gmi.edu/ drussell/Demos/waves/wavemotion.html*

4. Auf einem Seil werden Wellen erzeugt, indem dieses an der Stelle $x = 0$ mit einer Schwingung der Frequenz $\nu = 4\text{s}^{-1}$ und der Amplitude $y = 6$ cm erregt wird. Die Wellenlänge beträgt $\lambda = 32$ cm. Zur Zeit $t = 0$ s befinde sich bei $x = 0$ cm gerade ein Wellental.
   (a) Geben Sie die Orts-Zeit-Funktion eines Seilteilchens $y(t)$ an, dass sich bei $x = 0$ befindet. Wie groß ist die Maximalgeschwindigkeit v_m und die -beschleunigung a_m des Teilchens? Geben Sie y, v und a dieses Teilchens für $t = 2,2$ s an.
   (b) Wie lautet die Gleichung der Welle $y(x,t)$?
   (c) Welche Phasengeschwindigkeit besitzt diese Welle?

5. Zwei gleich laute Schallwellen überlagern sich in gleicher Ausbreitungsrichtung. Dabei ist die Frequenz ν_2 der zweiten Welle um $6,6\text{s}^{-1}$ höher, als die Frequenz $\nu_1 = 677\text{s}^{-1}$ der ersten. Die Schallgeschwindigkeit beträgt $c = 340$ m/s.
   (a) Berechnen Sie die resultierende Wellenfunktion $y(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t)$.
   (b) Zeichnen Sie das Momentbild der resultierenden Wellenfunktion zur Zeit $t = 0$, und berechnen Sie die Wellenlänge der resultierenden Welle und der einhüllenden Amplitudenfunktion. Wie groß ist die Periodendauer der Schwebung?

6. Sie wissen, dass sich die schnellsten Erdbebenwellen (P-Wellen) mit der Geschwindigkeit $v_P = \sqrt{\frac{K+4/3G}{\rho}}$ durch das Erdinnere ausbreiten, wohingegen die Rayleigh-Wellen sich mit der Geschwindigkeit $v_R = 0,92\sqrt{G/\rho}$ längs der Erdoberfläche ausbreiten. Berechnen Sie aus der Kenntnis des Abstands D längs der Erdoberfläche zu einem Erdbebenzentrum, das an der Erdoberfläche liegt, und aus den unterschiedlichen Laufzeiten T_P und T_R der Erdbebenwellen die Konstanten K und G. In welchem Rahmen sind ihre Überlegungen zulässig?

7. Ein freundlicher Theoretiker verrät ihnen die allgemeine Dispersionsrelation für Flüssigkeitswellen:
   $\omega(k) = \sqrt{gk\left(1 + \frac{\sigma}{\rho g}k^2\right)\tanh kh}$, wobei k der Betrag des Wellenzahlvektors, g die Erdbeschleunigung, σ die Oberflächenspannung, ρ die Dichte und h die mittlere Tiefe der Flüssigkeit ist.
   Weil Sie dieser Formel nicht einfach trauen, rechnen Sie nach, daß die bekannten Formeln für die Gruppengeschwindigkeiten in folgenden Grenzfällen richtig herauskommen: Schwerewellen in flachen Flüssigkeiten $(h, k \ll 1)$ $\Rightarrow u = \sqrt{gh}$, Schwerewellen in tiefen Flüssigkeiten $(k \ll 1,\ kh \gg 1) \Rightarrow u = 1/2\sqrt{g/k}$ und Kapillarwellen $(kh \gg 1,\ g \ll \sigma k^2/\rho) \Rightarrow u = 3/2\sqrt{\sigma k/\rho}$.

8. Berechnen Sie für die drei obigen Grenzfälle die Phasengeschwindigkeiten, die sich aus den entsprechenden Näherungen in der Formel: $\omega(k) = \sqrt{gk\left(1 + \frac{\sigma}{\rho g}k^2\right)\tanh kh}$ ergeben. Handelt es sich jeweils um dispersionsfreie Wellen, oder solche mit anomaler bzw normaler Dispersion? Zeigen Sie, daß in tiefem Wasser es eine kleinste Gruppengeschwindigkeit der Wellen gibt und berechnen Sie diese näherungsweise.

9. In welcher Flüssigkeit können Sie am ehesten Kapillarwellen erwarten (Hg, Alkohol, Benzol, Glycerin, Wasser, ...)? Wie groß muß der Betrag des Wellenzahlvektors k bei Wasser sein, damit $\frac{\sigma}{\rho g}k^2 = 100,\ 1,\ 0.01$ ist? Berechnen Sie die dazugehörigen Gruppengeschwindigkeiten in $1m$ tiefen Wasser mit den Näherungsformeln (das sind 7 Geschwindigkeiten).

10. Berechnen Sie die dazugehörigen Gruppengeschwindigkeiten in $1m$ tiefen Wasser mit der korrekten Formel $u = \frac{d\omega(k)}{dk}$ und vergleichen Sie diese 3 Geschwindigkeiten mit ihren Ergebnissen aus Aufgabe 3.