Eine Variante zur numerischen Integration von Einbettungssystemen

D. Gerbet, K. Röbenack

TU Dresden, Institut für Regelungs- und Steuerungstheorie, Georg-Schumann-Straße 7A,
Tel: ++49(0)351/463 33940, E-Mail: {daniel.gerbet1,klaus.roebenack}@tu-dresden.de

Für die numerische Integration von Systemen in Zustandsdarstellung existieren eine Vielzahl von numerischen Methoden. Diese gehen hauptsächlich auf die Arbeiten von Runge [4] und Kutta [3] zurück und wurden weiterentwickelt, beispielsweise durch Fehlerabschätzung und die darauf beruhenden Schrittweitensteuerung [1]. Nach ähnlichem Prinzip funktionieren exponentielle Integratoren [2].

Diese Verfahren haben gemein, daß eine Darstellung des Systems durch unabhängige Koordinaten benötigt wird. Solche Koordinaten sind jedoch nicht immer auf einfache Weise zu finden und können unter Umständen nur lokal existieren. Von daher ist es wünschenswert, die Verfahren auf Systeme der Form

$$\dot{x} = f(x) \tag{1a}$$

$$0 = g(x) \tag{1b}$$

mit Koordinaten $x \in \mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$, die den Zwangsbedingungen $g(x) = 0$ genügen, zu übertragen. In dieser Form muß das Vektorfeld f mit den Zwangsbedingungen kompatibel sein, das heißt, die Ableitung von g entlang des Vektorfeldes f muß für alle $x \in \mathcal{M}$ verschwinden.

Integriert man die Differentialgleichung (1a) numerisch ohne die Berücksichtigung der Zwangsbedingungen (1b), so wird der numerische Fehler dazu führen, daß letztere verletzt werden. Daher ist eine Korrektur erforderlich. Hier soll eine Variante vorgestellt werden, die nicht in das Integrationsschema selbst eingreift:

Sei G die Jacobimatrix der Abbildung g aus (1b), die für alle $x \in \mathcal{M}$ vollen (Zeilen-)Rang besitzt. Dann gilt, wie bereits erwähnt, für alle $x \in \mathcal{M}$ die Beziehung

$$G(x)\dot{x} = G(x)f(x) = 0,$$

die aus der Zeitableitung von (1b) folgt. Diese Bedingung wird nicht verletzt, wenn

$$G(x)\dot{x} = -Kg(x) \tag{2}$$

mit positiv definiter Matrix K gefordert wird. Allerdings kann (2) im gesamten eingebetteten Raum $\mathbb{R}^n \ni \mathcal{M}$ gelten. Die Forderung (2) impliziert die asymptotische Stabilität von (1b), was leicht anhand der Lyapunov-Funktion $x \mapsto g^{\mathrm{T}}(x)g(x)$ ersichtlich ist.

Wir nehmen nun eine LQ-Zerlegung

$$G = \big(L, 0\big)Q = \big(L, 0\big)\begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix}$$

der Matrix G (punktweise) vor. Dabei ist L eine untere Dreieckmatrix und Q eine orthogonale Matrix. Damit lautet (2)

$$LQ_1\dot{x} = -Kg(x)$$

und legt die Ableitung senkrecht zum Tangentialraum fest. Im Tangentialraum selbst müssen die korrekten Geschwindigkeiten

$$(0, \mathrm{I})Q\dot{x} = Q_2 f(x)$$

eingehalten werden. Diese beiden Gleichungen lassen sich gemeinsam nach $\dot{x}$ auflösen und man erhält

$$\dot{x} = Q_1^{\mathrm{T}} L^{-1} K g(x) + Q_2^{\mathrm{T}} Q_2 f(x)$$

und unter Ausnutzung von

$$Q_1^{\mathrm{T}} Q_1 + Q_2^{\mathrm{T}} Q_2 = \mathrm{I}$$

die günstigere Form

$$\dot{x} = f(x) - Q_1^{\mathrm{T}} \big(L^{-1} K g(x) + Q_1 f(x) \big). \tag{3}$$

Aus dieser wird auch der Korrekturterm im Vergleich zu (1a) offenkundig.

Die gewöhnliche Differentialgleichung (3) kann nun mittels gebräuchlichen Verfahren integriert werden. Es ist lediglich das korrigierte Vektorfeld zu verwenden, für dessen Auswertung eine LQ-Zerlegung der Jacobimatrix G vorzunehmen ist. Dies bedeutet, daß die Jacobimatrix G der Zwangsbedingung explizit implementiert werden muß. Benötigt das Integrationsverfahren selbst die Jacobimatrix des Vektorfeldes, so muß hier zudem die zweite Ableitung der Zwangsbedingung bemüht werden.

Es kann auch vorkommen, daß die Formulierung von redundanten Zwangsbedingungen vorteilhaft ist. In dem Fall wäre der konstant niedrigere Rang der Jacobimatrix zu beachten.

Literatur

[1] E. Fehlberg. Klassische Runge-Kutta-Formeln vierter und niedrigerer Ordnung mit Schrittweiten-Kontrolle und ihre Anwendung auf Wärmeleitungsprobleme. *Computing*, 6:61–71, 1970.

[2] M. Hochbruck und A. Ostermann. Exponential Integrators. *Acta Numerica*, 19:209–286, 2010.

[3] W. Kutta. Beiträge zur näherungsweisen Integration totaler Differentialgleichungen. *Zeitschrift für Mathematik und Physik*, 46:435–453, 1901.

[4] C. Runge. Ueber die numerische Auflösung von Differentialgleichungen. *Mathematische Annalen*, 46:167–178, 1895.