Systeme mit reversiblen und irreversiblen Kopplungen: Beschreibung durch Bond-Graphen und eine spezielle GENERIC-Formulierung

P. Kotyczka†, P. Betsch‡

†Technische Universität München, TUM School of Engineering and Design, Munich Institute of Robotics and Machine Intelligence (MIRMI), Lehrstuhl für Regelungstechnik, Boltzmannstraße 15, 85748 Garching, E-Mail: kotyczka@tum.de
‡Karlsruher Institut für Technologie, Institut für Mechanik, Otto-Ammann-Platz 9, 76131 Karlsruhe, E-Mail: peter.betsch@kit.edu

Für eine thermodynamisch konsistente Modellbeschreibung multiphysikalischer Systeme mit reversiblen und irreversiblen Kopplungen müssen sich sowohl der erste (Energieerhaltung) als auch der zweite (Entropieerzeugung) Hauptsatz der Thermodynamik in der Modellstruktur und den daraus abgeleiteten numerischen Schemata abbilden.

Ausgehend von den Port-Hamiltonschen (PH) Systemen, in denen die Systemdynamik von der Gesamtenergie (Hamiltonschen) H des Systems abgeleitet wird, wurden unterschiedliche Ansätze vorgeschlagen, wie irreversible Energiewandlungen im Modell berücksichtigen werden. Beispiele sind irreversible PH-Systeme [1], Port-Thermodynamische Systeme, die auf einer Untermannigfaltigkeit des thermodynamischen Phasenraums beschrieben sind [2] oder die Betrachtung auf Basis der Exergie [3].

Eine noch längere Geschichte haben Formulierungen wie metriplektische Systeme [4, 5] oder GENERIC[1] [6], bei denen neben der Energie E die Entropie S explizit als Generator der Systemdynamik auftritt. Die Systemgleichungen sind dabei additiv aus reversiblem und irreversiblem Anteil zusammensetzt. Eine spezielle GENERIC-Formulierung nach [7], hier dargestellt für geschlossene Systeme,

$$\dot{x} = \underbrace{M_S L_0 M_S^\top}_{=L} \nabla E(x) + \underbrace{M_E K_0 M_E^\top}_{=K} \nabla S(x)$$

mit $L = -L^\top$, $K = K^\top \geq 0$ sowie den Nichtinteraktions-Bedingungen $L\nabla S = K\nabla L = 0$, erlaubt durch die Transformationsmatrizen M_E bzw. M_S die freie Wahl der thermodynamischen Zustandsvariablen (Entropie, innere Energie, Temperatur). Auf Basis von GENERIC lassen sich z. B. strukturerhaltende Integrationsverfahren mit verschiedenen Erhaltungseigenschaften für gekoppelte Probleme ableiten [8].

Ziel des Vortrags ist, am Beispiel eines magnetisch gekoppelten, thermo-visko-elastischen Modellproblems zu zeigen, wie sich die spezielle GENERIC-Formulierung systematisch aus dem Bond-Graphen [9] des Systems herleiten lässt. Das Modellproblem hat dabei eine Struktur, wie sie auch aus der FE-Diskretisierung entsprechender verteilter Probleme hervorgeht. Weiterhin werden die Bezüge zu den anderen o. g. Formulierungen aufgezeigt und die Berücksichtigung von Toren für den Fall offener Systeme illustriert.

Literatur

[1] Ramirez, H.; Maschke, B.; Sbarbaro, D. (2013): Irreversible port-Hamiltonian systems: A general formulation of irreversible processes with application to the CSTR. In:

[1] General Equation for Non-Equilibrium Reversible-Irreversible Coupling

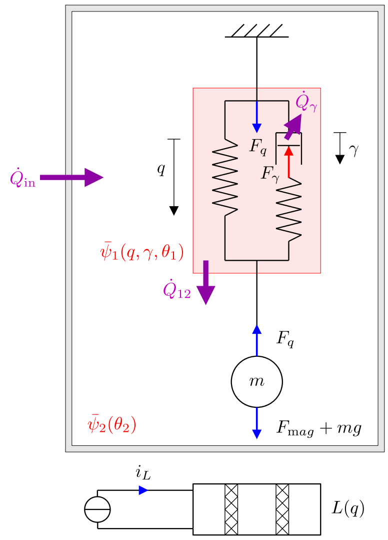

Abbildung 1: Schema des Modellproblems: Ein ferromagnetischer Körper, der über ein viskoelastisches Federelement aufgehängt ist, wird magnetisch aktuiert. Wärmeströme zwischen den thermischen Subsystemen und der Umgebung sind durch die violetten Pfeile angedeutet.

Chemical Engineering Science 89 (0), S. 223–234. DOI: 10.1016/j.ces.2012.12.002.

[2] van der Schaft, A. (2023): Geometric modeling for control of thermodynamic systems. In: *Entropy* 25 (4), 577. DOI: 10.3390/e25040577.

[3] Lohmayer, M.; Kotyczka, P.; Leyendecker, S. (2021): Exergetic port-Hamiltonian systems: Modelling basics. In: *Mathematic and Computer Modelling of Dynamical Systems* 27 (1), S. 489–521. DOI: 10.1080/13873954.2021.1979592.

[4] Kaufman, A. N. (1984): Dissipative Hamiltonian systems: A unifying principle. In: *Physics Letters A* 100 (8), S. 419–422. DOI: 10.1016/0375-9601(84)90634-0.

[5] Morrison, P. J. (1986): A paradigm for joined Hamiltonian and dissipative systems. In: *Physica D: Nonlinear Phenomena* 18 (1-3), S. 410–419. DOI: 10.1016/0167-2789(86)90209-5.

[6] Grmela, M.; Öttinger, H. C. (1997): Dynamics and thermodynamics of complex fluids. I. Development of a general formalism. In: *Physical Review E* 56 (6), S. 6620–6632. DOI: 10.1103/PhysRevE.56.6620.

[7] Mielke, A. (2011): Formulation of thermoelastic dissipative material behavior using GENERIC. In: *Continuum Mechanics and Thermodynamics* 23, S. 233-256. DOI: 10.1007/s00161-010-0179-0

[8] Betsch, P.; Schiebl, M. (2020): GENERIC-based formulation and discretization of initial boundary value problems for finite strain thermoelasticity. In: *Computational Mechanics* 65 (2), S. 503–531. DOI: 10.1007/s00466-019-01781-5.

[9] Paynter, H. M. (1961): *Analysis and Design of Engineering Systems*. MIT Press.