Nichtlineare flachheitsbasierte Backstepping-Regelung des Einphasen-Stefan-Problems

J. Deutscher[1], **A. Irscheid**[2], **N. Gehring**[3]

[1] Institut für Mess-, Regel- und Mikrotechnik, Universität Ulm,
E-Mail: joachim.deutscher@uni-ulm.de
[2] Lehrstuhl für Systemtheorie und Regelungstechnik, Universität des Saarlandes,
E-Mail: a.irscheid@lsr.uni-saarland.de
[3] Lehrstuhl für Systemtheorie und Regelungstechnik, OVGU Magdeburg,
E-Mail: nicole.gehring@ovgu.de

Die Backstepping-Methodik ist ein etabliertes Verfahren zum Entwurf von Zustandsrückführungen und -beobachtern für verteilt-parametrische Systeme (SVP) (siehe [5]). Der Schwerpunkt liegt dabei auf linearen Systemen, wofür in den letzten zwei Jahrzehnten zahlreiche Ergebnisse erzielt wurden. Für den Backstepping-Entwurf nichtlinearer SVP existieren dagegen bislang nur wenige Resultate. Dies liegt an der Komplexität der nichtlinearen Backstepping-Transformation in Form einer Volterra-Integral-Funktionalreihe, wie erstmals in [8, 9] für semilineare parabolische Systeme gezeigt wurde.

Eine Alternative zu Volterra-Funktionalreihen bieten *quasilineare parameterveränderliche* (QLPV-) Backstepping-Transformationen, mit denen sich bei vielen nichtlinearen SVP eine Abbildung auf ein gewünschtes Zielsystem erreichen lässt. Dabei wird die Struktur einer linearen Backstepping-Transformation mit zeitlich veränderlichen Parametern beibehalten. Die Parameter hängen dabei vom Zustand ab, weshalb eine quasilineare Transformation resultiert. Da die Kerngleichungen jedoch ebenfalls vom Regelungszustand abhängen, müssen sie online gelöst werden. Um dies zu vermeiden, kann man deren Zeitabhängigkeit konstant halten, sodass zu jedem Zeitpunkt nur klassische Kerngleichungen zu lösen sind. Dies führt auf *gain-scheduling*-Ansätze, wie sie erstmals in [7] diskutiert wurden. Die Online-Lösung dieser vereinfachten Kerngleichungen ist allerdings nur in einfachen Fällen durchführbar. Eine weitere Möglichkeit bieten *neuronale Operatoren*, bei denen ein neuronales Netz offline mit den Lösungen der Kerngleichungen trainiert wird. Mit dem resultierenden neuronalen Operator lassen sich die Kerngleichungen im Regelkreis zur Laufzeit effizient lösen (siehe [6]). Durch die Vereinfachung der Kerngleichungen treten jedoch nichtlineare Zusatzterme im Zielsystem auf, die den Entwurf und die Analyse der Regelung erschweren.

Im Vortrag wird ein neuer Zugang zur nichtlinearen Backstepping-Regelung mittels QLPV-Backstepping vorgestellt, bei dem sich die Transformationen zur Vorgabe gewünschter Zielsysteme vorab analytisch bestimmen lassen. Die wesentliche Grundlage hierfür ist der in den letzten Workshops vorgestellte *flachheitsbasierte Entwurf* nichtlinearer Regelungen für parabolische Systeme. Dabei wird eine nichtlineare Transformation auf ein gewünschtes Zielsystem in Flachheitskoordinaten betrachtet, wozu ein Cauchy-Problem mittels Potenzreihenansatz zu lösen ist (siehe [3]). Im Vortrag wird gezeigt, dass sich diese Flachheitstransformation als QLPV-Backstepping-Transformation darstellen lässt. Dies ermöglicht sowohl eine einfache Stabilitätsanalyse mittels der Backstepping-Methodik als auch eine systematische Bestimmung der Transformation auf Basis der Flachheitseigenschaft.

Die neue Entwurfsmethodik wird für eine nichtlineare flachheitsbasierte Folgeregelung des

Einphasen-Stefan-Problems eingesetzt. Es beschreibt Erstarrungs- und Schmelzvorgänge von Substanzen für eine Phase und führt auf parabolische SVP mit einem von der Lösung abhängigen Ortsbereich. Ein typisches Anwendungsbeispiel ist das Kristallwachstum zur Züchtung von Einkristallen bei der Waferherstellung (siehe z. B. [2]). Bisherige Backstepping-Ansätze zur Regelung des Stefan-Problems beschränken sich auf heuristische Transformationen [4] oder auf Linearisierungen entlang einer Solltrajektorie [1]. Im Vortrag wird nach dem Entwurf einer flachheitsbasierten Vorsteuerung zur gezielten Vorgabe des Verlaufs der Phasengrenze zwischen festem und flüssigem Material ein nichtlinearer flachheitsbasierter Folgeregler vorgestellt. Dazu erfolgt die Betrachtung einer QLPV-Backstepping-Transformation auf ein gewünschtes exponentiell stabiles Zielsystem mit vorgebbarer Stabilitätsreserve. Damit lässt sich die Existenz der Transformation auf die Wohlgestelltheit der zugehörigen Kerngleichungen zurückführen und die Stabilität der Regelung einfach nachweisen. Die analytische Bestimmung der Transformation und damit des Reglers erfolgt flachheitsbasiert durch Lösung eines Cauchy-Problems. Für die Rückführung der Flachheitskoordinaten müssen die Zeitableitungen der Phasengrenze aus dem verteilten Zustand bestimmt werden. Dafür wird das numerische Verfahren aus [3] auf das betrachtete Problem erweitert. Die Wirksamkeit des neuen nichtlinearen Folgereglerentwurfs wird abschließend anhand eines Simulationsbeispiels demonstriert.

[1] Ecklebe, S. ; Gehring, N.: Backstepping-based tracking control of the vertical gradient freeze crystal growth process. In: *IFAC-PapersOnLine* 56 (2023), S. 8171–8176

[2] Ecklebe, S. ; Gehring, N. ; Woittennek, F. ; Winkler, J.: Beiträge zur Regelung des VGF-Kristallzüchtungsprozesses. In: *at - Automatisierungstechnik* 71 (2023), S. 232–243

[3] Irscheid, A. ; Gehring, N. ; Deutscher, J. ; Rudolph, J.: Stabilizing nonlinear ODEs with diffusive actuator dynamics. In: *IEEE Contr. Syst. Lett.* 8 (2024), S. 1259–1264

[4] Koga, S. ; Diagne, M. ; Krstic, M.: Control and state estimation of the one-phase Stefan problem via backstepping design. In: *IEEE Trans. Autom. Control* 64 (2019), S. 510–525

[5] Krstic, M. ; Smyshlyaev, A.: *Boundary Control of PDEs — A Course on Backstepping Designs*. Philadelphia : SIAM, 2008

[6] Lamarque, M. ; Bhan, L. ; Vazquez, R. ; Krstic, M.: Gain scheduling with a neural operator for a transport PDE with nonlinear recirculation. In: *IEEE Trans. Autom. Control* 70 (2025), S. 5616–5623

[7] Siranosian, A. ; Krstic, M. ; Smyshlyaev, A. ; Bement, M.: Gain scheduling-inspired boundary control for nonlinear partial differential equations. In: *J. Dyn. Syst. Meas. Control* 133 (2011). – Art. no. 051007

[8] Vazquez, R. ; Krstic, M.: Control of 1-D parabolic PDEs with Volterra nonlinearities, Part I: Design. In: *Automatica* 44 (2008), S. 2778–2790

[9] Vazquez, R. ; Krstic, M.: Control of 1-D parabolic PDEs with Volterra nonlinearities, Part II: Analysis. In: *Automatica* 44 (2008), S. 2791–2803