Näherungsweiser Folgereglerentwurf durch Reihenentwicklung

D. Gerbet, K. Röbenack

TU Dresden, Institut für Regelungs- und Steuerungstheorie, Georg-Schumann-Straße 7A,
Tel: ++49(0)351/463 33940, E-Mail: {daniel.gerbet1,klaus.roebenack}@tu-dresden.de

Die Eingangs-Ausgangs-Linearisierbarkeit eines Systems ist eine sehr nützliche Eigenschaft für den Reglerentwurf: Es lässt sich eine beliebige asymptotisch stabile Dynamik für den Folgefehler, also die Abweichung des Ausgangs von einer Referenztrajektorie, wählen. Daraus ergibt sich direkt eine Vorschrift für die Rückführung auf den Eingang.

Als notwendige Voraussetzung muss ein Ausgang des Systems existieren, der bezüglich des Eingangs einen überall wohldefinierten relativen Grad besitzt. Diese Eigenschaft haben jedoch nicht alle Systeme. Ein solches Beispiel ist die in Abb. 1 skizzierte Wippe, auf der ein Zylinder rollt, und die selbst durch ein Drehmoment gekippt werden kann. Für dieses System wurden bereits Ansätze zum Folgereglerentwurf untersucht [1, 2].

Im Falle eines bestimmten Verhältnisses der Trägheitsmomente und der Aufhängung der Wippe oder für einen verhältnismäßig kleinen Radius des Zylinders lässt sich das System durch die Differentialgleichungen

$$\ddot{v} = Bv\dot{\theta}^2 - Bg\sin\theta\ , \quad \ddot{\theta} = u \tag{1}$$

beschreiben. Dabei bezeichnet θ die Auslenkung der Wippe gegenüber der Horizontalen, v den Rollweg des Zylinders auf der Wippe, und der Eingang u wurde als Winkelbeschleunigung der Wippe gewählt, welche in das Drehmoment umgerechnet werden kann. Der Parameter B hängt von den Trägheitseigenschaften des rollenden Zylinders ab und g bezeichnet die Fallbeschleunigung.

Der Ausgang v hat den relativen Grad 3 bezüglich u, ist aber für $v = 0$ oder $\dot{\theta} = 0$ nicht wohldefiniert. Daher ist eine linearisierende Rückführung nicht möglich.

Andererseits fällt auf, daß das um die Ruhelage $\theta = 0$ linearisierte System lediglich einen Vierfachintegrator darstellt. Dieses lineare System ist steuerbar. Man kann also erwarten, daß ein Folgeregler für das exakte (nichtlineare) System (1) existiert, der sich für kleine Auslenkungen so wie ein am linearisierten System entworfener linearer Regler verhält.

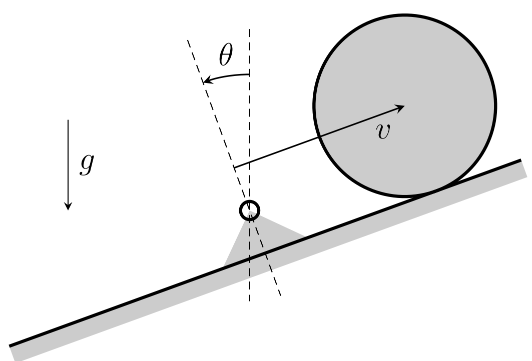

Abbildung 1: Wippe mit rollendem Zylinder

Derartige Regler lassen sich systematisch für Systeme der Form

$$\dot{x} = Ax + bu + F(x, u),$$

wobei die Linearisierung des als analytisch vorausgesetzten Vektorfeldes F um die Gleichgewichtslage $(x, u) = (0, 0)$ verschwindet, und das linearisierte System

$$\dot{x} = Ax + bu \tag{2}$$

steuerbar ist, entwerfen. Hierzu wird eine asymptotisch stabile Fehlerdynamik für den Folgefehler $v - v_{\mathrm{ref}}$ vorgegeben. Die Rückführung wird als Reihe

$$u = k_1(x, v_{\mathrm{ref}}, \dot{v}_{\mathrm{ref}}, \ldots) + k_2(x, v_{\mathrm{ref}}, \dot{v}_{\mathrm{ref}}, \ldots) + k_3(x, v_{\mathrm{ref}}, \dot{v}_{\mathrm{ref}}, \ldots) + \cdots$$

angesetzt, wobei k_i homogene Polynome vom totalen Grad i in den Zustandsvariablen x und den Ableitungen der Referenztrajektorie sind.

Der lineare Regler

$$u = k_1(x, v_{\mathrm{ref}}, \dot{v}_{\mathrm{ref}})$$

ergibt sich durch Umstellen der Fehlerdynamik und des linearen Systems (2) nach dem Eingang. Für die Terme höheren Grades wird der nichtlineare Teil $F(x, u)$ des Vektorfeldes in seine Maclaurin-Reihe entwickelt. Die Koeffizienten des Reglers lassen sich dennoch sukzessive bestimmen, ohne das nichtlineare Gleichungen zu lösen sind. Durch Berücksichtigung der Terme von höherem Grade im Regler ergibt sich schließlich eine Fehlerdynamik, die der vorgegebenen bis zu diesem Grad entspricht.

Durch die Entwicklung in Potenzreihen erhält man lediglich ein lokales Regelgesetz. Zudem werden mit steigendem Grad des Reglers höhere Ableitungen der Referenztrajektorie benötigt, und somit strengere Forderungen an deren Differenzierbarkeit gestellt. Dennoch lässt sich der verbleibende Folgefehler durch Berücksichtigung der Terme bis zu einem bestimmten Grad im Vergleich zum linearen Regler verringern.

Literatur

[1] J. Hauser, S. Sastry, und P. Kokotovic. Nonlinear control via approximate input-output-linearization: The ball and beam example. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 37(3):392–398, 1992.

[2] D. J. Leith und W. E. Leithead. Input-output linearisation of nonlinear systems with ill-defined relative degree: the ball and beam revisited. In: *Proc. American Control Conference (ACC)*, Band 4, S. 2811–2816. American Automatic Control Council, 2001.