

# Integration Algebraischer Ableitungsschätzer in den Entwurf kaskadierter PDE-ODE-Beobachter

**F. Meiners†, A. Othmane‡, J. Adamy†**

†Fachgebiet Regelungsmethoden und Intelligente Systeme, Landgraf-Georg-Str. 4, 64283 Darmstadt, Tel: +49(0)6151/16-25031, E-Mail: florian.meiners@tu-darmstadt.de

‡Professur für Modellierung und Simulation technischer Systeme, Universität des Saarlandes, Campus, Geb. A 51, Zi. 1.06, 66123 Saarbrücken, Tel: +49 (0)681/302-3766, E-Mail: amine.othmane@uni-saarland.de

Nicht gemessene Zustände eines beobachtbaren linearen zeitinvarianten Systems lassen sich entweder mithilfe eines Zustandsbeobachters schätzen oder direkt aus dem Eingang, dem Ausgang und einer geeigneten Anzahl ihrer Zeitableitungen berechnen. Allerdings stellt die numerische Differentiation gemessener Signale ein schlecht gestelltes Problem dar, das äußerst anfällig für Messstörungen ist. Zudem kann bereits eine geringe Abweichung zwischen Modell und Realität die direkte Zustandsberechnung stark verfälschen. Daher eignet sich dieser Ansatz in den meisten regelungstechnischen Szenarien nicht. Zustandsbeobachter ermöglichen eine modellbasierte Schätzung mit vorgebbarer Dynamik des Schätzfehlers. Sie zeichnen sich durch eine hohe Robustheit gegenüber Messrauschen sowie durch garantierte Stabilität bei geeigneter Auslegung aus. Zudem erlauben sie eine konsistente Einbindung physikalischer Systemkenntnisse in die Schätzstrategie und bieten theoretisch fundierte Aussagen über die Konvergenz der geschätzten Zustände zu den tatsächlichen Systemzuständen. Voraussetzung hierfür ist jedoch ein hinreichend genaues mathematisches Modell des zugrunde liegenden Systems, das als Grundlage für die Beobachterausslegung dient. Im Gegensatz dazu ist die numerische Differentiation modellfrei und bietet insbesondere in datengetriebenen Anwendungen oder bei unbekannter Systemdynamik entscheidende Vorteile. Effiziente, echtzeitfähige Verfahren ermöglichen unter geeigneter Parametrierung eine präzise Schätzung nicht direkt messbarer Größen ausschließlich auf Basis von Messdaten.

Im Vortrag wird ein Verfahren zur Kombination einer speziellen Klasse numerischer Differentiationsmethoden, den algebraischen Ableitungsschätzern (z.B. [2, 3]), mit einer klassischen Ausgangsfehlerinjektion vorgestellt, das die Vorteile beider Ansätze vereint. Die Interpretation der Schätzungen algebraischer Differenzierer als Messungen von fiktiven Sensoren ermöglicht die Umformulierung des Gesamtsystems als PDE-ODE-Kaskade, für die der Beobachter aus [1] angesetzt wird. Eine solche Kombination erlaubt es, die Vorteile der modellfreien Differentiation in die Beobachterschätzung zu integrieren. Ein hybrider Ansatz kann somit zur Verbesserung der Schätzungsgüte, zur Erhöhung der Robustheit gegenüber Modellunsicherheiten und zur flexiblen Anpassung an unterschiedliche Anwendungsszenarien beitragen.

Eine Untersuchung des PDE-ODE-Beobachters wird vorgestellt und eine Reihe von Vorzügen gegenüber klassischen Ansätzen diskutiert. Die Verbesserung der Beobachtbarkeitseigenschaften des zugrundeliegenden Systems durch die fiktiven Sensoren wird bewiesen. Darüber hinaus erschließt man durch das Miteinbeziehen der Ableitungsschätzungen zusätzliche Freiheitsgrade beim Entwurf. Diese können insbesondere verwendet werden, um die Einträge der Rückführmatrix zu beeinflussen und dadurch Rauschen in der Beobachtung zu minimieren.

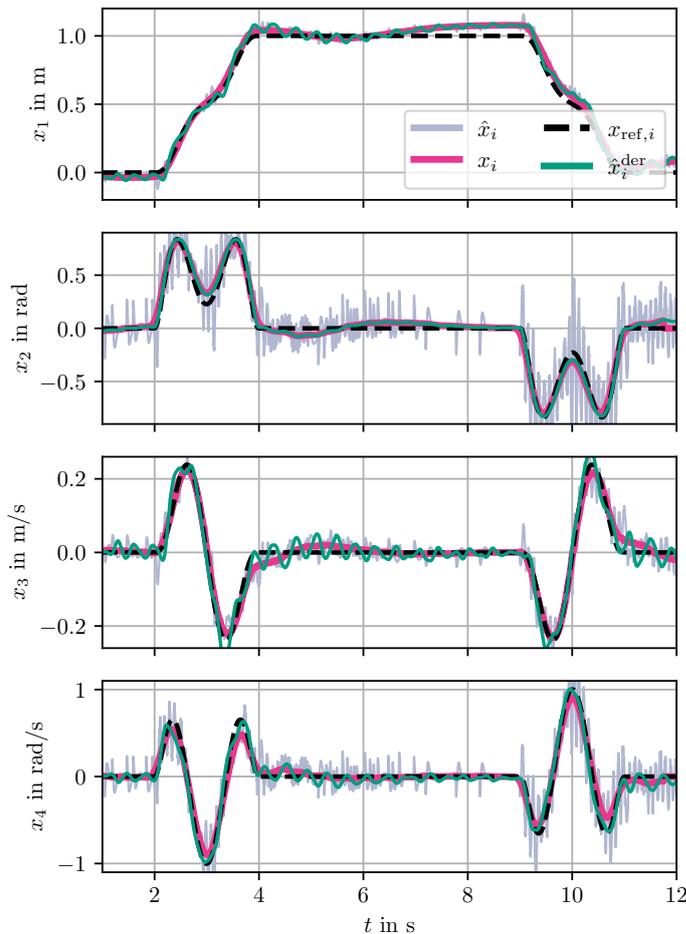


Abbildung 1: Experimentelle Ergebnisse bei Verwendung des PDE-ODE-Beobachters im geschlossenen Regelkreis für einem Verladekran. Die horizontale Position und Geschwindigkeit der Katze sind durch  $x_1, x_2$  gegeben. Der Seilwinkel und die zugehörige Winkelgeschwindigkeit werden mit  $x_3$  und  $x_4$  bezeichnet (pink, rekonstruiert durch weitere Sensoren). Die geschätzten Zustände der Beobachter sind  $\hat{x}_i$  für den Luenberger-Beobachter (grau), und  $\hat{x}_i^{\text{der}}$  für den PDE-ODE-Beobachter in grün, die Referenztrajektorie in schwarz.

gewinn über den Systemzustand durch die zusätzlichen Ausgangsgrößen analytisch eindeutig quantifizieren: die zweite Ableitung der Messung entspricht gerade einem Vielfachen des nicht gemessenen Seilwinkels. Die Verwendbarkeit des Beobachters im geschlossenen Regelkreis wird experimentell validiert.

## Literatur

- [1] N. Bekiaris-Liberis und M. Krstic. Lyapunov stability of linear predictor feedback for distributed input delays. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 56(3):655–660, 2010.
- [2] M. Mboup, C. Join, und M. Fliess. Numerical differentiation with annihilators in noisy environment. *Numer. Algorithms*, 50(4):439–467, 2009.
- [3] A. Othmane, L. Kiltz, und J. Rudolph. Survey on algebraic numerical differentiation: historical developments, parametrization, examples, and applications. *Int. Journal of Systems Science*, 53(9):1848–1887, 2022.

Zur Motivation der Vorteile der vorgestellten Verfahrens wird im Vortrag ein Modell vierter Ordnung eines Verladekrans betrachtet, in dem der erste und dritte Zustand jeweils die Katzposition und der Seilwinkel bezüglich geeigneter Referenzen sind. Entsprechend handelt es sich beim zweiten und vierten Zustand um die zugehörigen Geschwindigkeiten. Direkt gemessen wird aber lediglich die horizontale Lastposition, was für erhebliche Probleme beim Entwurf eines Luenberger-Beobachters sorgt.

Für eine schnelle Fehlerkonvergenz sind nämlich große Einträge in der Rückführmatrix zu wählen, die zu einer Verstärkung des Messfehlers führen. Das zeigt sich auch in den experimentellen Ergebnissen in Abbildung 1. Fasst man allerdings die Schätzungen der ersten beiden Ableitungen, die ein algebraischer Differenzierer liefert, als verzögerte Messungen zusätzlicher fiktiver Sensoren auf, so können Freiheitsgrade in der Wahl der Beobachtermatrix gezielt genutzt werden. Zudem lässt sich der Informationsgewinn über den Systemzustand durch die zusätzlichen Ausgangsgrößen analytisch eindeutig