Steuerung des Reifegrads für Betonstrukturen aus hochfestem Beton

D. Ratke†, T. Meurer†

†Digital Prozess Engineering Group, Institut für Mechnische Verfahrenstechnik und Mechanik, 76131 Karlsruhe, Tel: +49(0)721 608-41483, E-Mail: {denis.ratke, thomas.meurer}@kit.edu

Beton als ein Mehrkomponentenmaterial zählt zu den weltweit am häufigsten eingesetzten Baustoffen. Durch gezielte Anpassung der Zusammensetzung und Modifikation von Zusatzstoffen konnten seine mechanischen und chemischen Eigenschaften im Laufe der Zeit kontinuierlich verbessert werden. Dabei entstanden verschiedene Betonarten für spezifische Anwendungsbereiche. Eine dieser Entwicklungen ist der Hochleistungsbeton (HFB), der sich durch hohe Druckfestigkeit, Dichte und Dauerhaftigkeit auszeichnet. Neben diesen Merkmalen lassen sich weitere Eigenschaften, wie etwa die Frühfestigkeit, das reduzierte Schwind- und Kriechverhalten, durch gezielte Temperaturbehandlungen während der Aushärtephase verbessern [3]. Zur quantitativen Beschreibung dieser durch Wärmeeintrag beeinflussten Eigenschaften eignet sich das Konzept des Reifegrads. Auf dieser Grundlage kann die Entwicklung der mechanischen Eigenschaften von HFB im Zeitverlauf prognostiziert werden [2, 4]. Neben der Vorhersage bietet das Reifegradkonzept auch das Potential zur gezielten Steuerung der mechanischen Leistungsfähigkeit, indem der Temperatureintrag in Aushärtungsphase gezielt gesteuert wird.

Dem zugrunde liegenden Reifemodell liegt ein gekoppeltes System nichtlinearen partiellen Differentialgleichungen (PDGL)

$$\begin{aligned}
\gamma\partial_t T &= \nabla\big(\kappa\nabla T\big) + Q(m)\partial_t m, && \text{in } \Lambda,\\
\partial_t\theta &= \nabla\big(D(\theta)\nabla\theta\big) - \eta\partial_t m, && \text{in } \Lambda,\\
\partial_t m &= \mu(1-m)\theta e^{-E/RT}, && \text{in } \Lambda,\\
\lambda\nabla T\cdot\boldsymbol{n} &= \dot{q}, && \text{auf } \Pi,\\
D_m\nabla\theta\cdot\boldsymbol{n} &= 0, && \text{auf } \Pi,\\
T(\cdot,0) = T_0,\ \theta(\cdot,0) &= \theta_0,\ m(\cdot,0) = m_0, && \text{in } \Omega,
\end{aligned}$$

mit $\Lambda := [0,\tau)\times\Omega$ und $\Pi := [0,\tau)\times\partial\Omega$, wobei die Temperatur T, Feuchtigkeit θ und Reife m zeit- und ortsabhängig modelliert werden. Die Einbettung dieser Gleichungen in ein Optimierungsproblem führt zu einem dynamischen Steuerungsproblem mit PDGLn-Nebenbedingungen. Zur Lösung kommen gradientenbasierte Verfahren in einer sequentiellen Optimierungsschleife zum Einsatz, welche auf dem sogenannten *discretized-then-optimize*-Ansatz basieren. Dabei erfolgt zunächst eine Diskretisierung der zugrundeliegenden Gleichungen mit Hilfe der Finite Elemente Methode (FEM)

$$\dot{\boldsymbol{\chi}}(t) = \boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{\chi}(t),\dot{\boldsymbol{q}}(t)),\quad t>0,\qquad \boldsymbol{\chi}(0)=\boldsymbol{\chi}_0,$$

mit dem Zustandsvektor $\boldsymbol{\chi}(t) = [\boldsymbol{T}(t),\boldsymbol{\theta}(t),\boldsymbol{m}(t)]^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^n$ und dem Steuereingang $\dot{\boldsymbol{q}}(t)$. Anschließend wird der Gradient mithilfe der Adjungierten-Methode im Verbund mit automatischen Differenzierungsverfahren für jede Optimierungssequenz berechnet und die gesuchte Steuerung $\dot{\boldsymbol{q}}$ iterativ verbessert bis das Optimum erreicht ist. Die Adjungierten-Methode ermöglicht eine besonders effiziente und präzise Gradientenberechnung, da ihre Rechenkosten unabhängig von der Anzahl der Entscheidungsvariablen sind.

Trotz seiner Vorteile hat dieser Ansatz auch Grenzen, da neben dem Originalsystem zusätzlich das adjungierte System in jedem Optimierungsschritt gelöst werden muss. Gerade bei komplexen PDGLn mit hoher räumlicher und zeitlicher Auflösung kann dies einen erheblichen Rechenaufwand bedeuten. Um die Rechenkosten zu senken, kommen Methoden der Modellordnungsreduktion (MOR) zum Einsatz. Diese projizieren das hochdimensionale System n auf einen deutlich kleineren Unterraum der Dimension $r \ll n$. Dadurch ergibt sich ein wesentlich kompakteres Ersatzmodell, das sich mit weniger Rechenaufwand auswerten lässt. Eine gängige MOR-Technik ist die Proper-Orthogonal-Dekomposition, mit deren Hilfe eine niederdimensionale Basis aus Simulationsdaten X_χ konstruiert werden kann. Dabei wird mittels der Singulärwertzerlegung (SVD) der Simulationsdaten $X_\chi = \Psi_\chi \Sigma_\chi U_\chi^{\mathrm{T}}$, eine orthogonale Basis $\Psi_\chi \in \mathcal{R}^{r\times n}$ ermittelt, mit der sich die Zustände in den reduzierten Raum projizieren $\tilde{\boldsymbol{T}} = \tilde{\Psi}_T^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}$, $\tilde{\boldsymbol{\theta}} = \tilde{\Psi}_\theta^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\theta}$, $\tilde{\boldsymbol{m}} = \tilde{\Psi}_m^{\mathrm{T}}\boldsymbol{m}$ lassen. Da die POD primär für lineare Probleme geeignet ist, werden bei nichtlinearen Systemen sogenannte Hyperreduktionsverfahren benötigt. Eine verbreitete Methode is die Discrete-Empirical-Interpolation-Method (DEIM) [1]. Anstatt die nichtlinearen Terme vollständig im hoch-dimensionalem Raum zu berechnen, erfolgt die Auswertung nur an ausgewählten diskreten Punkten (Stützstellen). Diese Stützstellen werden ebenfalls datenbasiert – wiederum mithilfe der SVD – aus den nichtlinearen Komponenten extrahiert. In Kombination mit der POD ergibt sich so ein vollständig reduziertes Modell

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{\chi}}}(t) = \boldsymbol{f}(t, \tilde{\boldsymbol{\chi}}(t), \dot{\boldsymbol{q}}(t)), \quad t > 0, \qquad \tilde{\boldsymbol{\chi}}(0) = \tilde{\boldsymbol{\chi}}_0,$$

das auch nichtlineare Effekte effizient approximieren kann.

Dieser Beitrag befasst sich mit der numerischen Steuerung des Betonreifeprozesses auf Basis eines verteilt-parametrischen Modells unter Verwendung mathematischer Methoden aus dem Bereich der optimalen Steuerung. Durch die Kombination Modellordnungsreduktion, Hyperreduktion und Optimierung wird eine effiziente Steuerung des Reifeprozesses untersucht und ermöglicht, die langfristig auch eine Echtzeitregelung in praxisnahen Anwendungen unterstützen kann.

Danksagung: Gefördert durch die Deutsche Forschungsgemeinschaft (DFG) – Projekt 458161128 (Mark/ Meurer).

Literatur

[1] Chaturantabut, S.; Sorensen, D.C. Application of POD and DEIM on Dimension Reduction of Non-Linear Miscible Viscous Fingering in Porous Media. *Math. Comput. Model. Dyn. Syst.* **2011**, *17*, 337–353. https://doi.org/10.1080/13873954.2011.547660

[2] Zhang, J.; Cusson, D.; Monteiro, P.; Harvey, J.: *New Perspectives on Maturity Method and Approach for High Performance Concrete Applications*, Cement and Concrete Research, **38**(12), 1438–1446 (2008).

[3] Stindt, J.; Forman, P.; Mark, P. Influence of Rapid Heat Treatment on the Shrinkage and Strength of High-Performance Concrete. Materials 2021, 14, 4102. https://doi.org/10.3390/ma14154102

[4] Ratke, D.; Meurer, T.; Schwarz, Y.; Sanio, D.; Mark, P. Model-Based Estimator Design for the Curing Process of a Concrete Structure. *IFAC-PapersOnLine* **2023**, *56* (2), 3241–3246.