

Flachheitsbasierte Regelung hyperbolischer Mehrgrößensysteme am Beispiel des Timoshenko-Balkens

S. Schmidt¹, N. Gehring², A. Irscheid³

¹ Institut für Regelungstechnik, Johannes Kepler Universität Linz, Altenberger Straße 69, 4040 Linz, E-Mail: simon.schmidt@jku.at

² Lehrstuhl für Systemtheorie und Regelungstechnik, Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg, Universitätsplatz 2, 39106 Magdeburg, E-Mail: nicole.gehring@ovgu.de

³ Lehrstuhl für Systemtheorie und Regelungstechnik, Universität des Saarlandes, Campus A5 1, 66123 Saarbrücken, E-Mail: a.irscheid@lsr.uni-saarland.de

Der flachheitsbasierte Regelungsentwurf basiert bekanntlich auf der Parametrierung aller Systemgrößen durch einen flachen Ausgang. Da sich aus der Eingangsparametrierung eine Systembeschreibung in Brunovsky-Normalform oder Regelungsnormalform ableiten lässt, kann basierend auf ihr relativ direkt ein Folgeregler entworfen werden. Diese Grundgedanken treffen sowohl auf endlich- als auch unendlichdimensionale Systeme zu. Für hyperbolische Eingrößensysteme mit Raddynamik wurde die flachheitsbasierte Regelungstheorie in [4] eingeführt. Zentrales Element ist dabei die Transformation des Systems auf hyperbolische Regelungsnormalform (hRNF), in der analog zur Integratorkette im endlichdimensionalen Fall die Systemdynamik durch eine Transportgleichung beschrieben wird. Zur nicht-trivialen Erweiterung dieser Ergebnisse auf hyperbolische Systeme mit mehreren Eingangsgrößen wurden im letzten Workshop erste Ergebnisse vorgestellt. Die mittlerweile weiterentwickelten Methoden werden im Vortrag anhand eines Beispiels diskutiert: dem Timoshenko-Balken.

Unter einem Timoshenko-Balken versteht man einen Balken (z.B. in Brücken oder Gebäuden), bei dem neben ortsabhängigen Durchbiegungen, wie sie auch in der klassischen Euler-Bernoulli-Theorie auftreten, zusätzlich Schubverformungen Berücksichtigung finden. Das mathematische Modell umfasst zwei gekoppelte Wellengleichungen, wobei davon ausgegangen wird, dass am aktuierten Rand sowohl die Kraft als auch das Moment vorgegeben werden können. Diese Anordnung stellt ein typisches Beispiel für ein hyperbolisches Mehrgrößensystem dar, wofür sich in der Literatur zahlreiche Regelungsstrategien finden, wie beispielsweise die direkte Randwertvorgabe in [2], die flachheitsbasierte Folgeregelung in [1] oder der Backstepping-Ansatz in [3], der eine port-Hamiltonsche Formulierung nutzt.

Im Vortrag wird anhand des Beispiels des Timoshenko-Balken gezeigt, wie sich dessen Systemgleichungen auf hRNF transformieren und basierend darauf sehr einfach flachheitsbasierte Folgeregler entwerfen lassen. Dafür überführt zunächst eine Reihe an Transformationen das hyperbolische Mehrgrößensystem in eine für die Lösungsberechnung vorteilhafte Form. Eben diese Lösung eines Cauchy-Problems führt anschließend auf die Parametrierung der Zustands- und Eingangstrajektorien durch einen flachen Ausgang. Basierend darauf lässt sich der Normalformzustand konstruktiv definieren und die hRNF angeben. Es wird gezeigt, dass die zugehörige Transformation zwischen Original- und hRNF-Zustand invertierbar ist. Da sie explizit vom Eingang und dessen zukünftigen Werten abhängt, treten gleichfalls in der hRNF Prädiktionen des Eingangs auf. Damit kann bei der resultierenden hRNF nicht von einer Zustandsdarstellung im klassischen Sinn gesprochen werden. Die Wahl einer gewünschten Dynamik für den geschlossenen Kreis führt letztlich

direkt auf einen Folgeregler, genauer auf eine quasi-statische Zustandsrückführung.

- [1] J. Becker und T. Meurer. Feedforward tracking control for non-uniform Timoshenko beam models: combining differential flatness, modal analysis, and FEM. *J. Appl. Math. Mech.*, 87(1):37–58, 2006.
- [2] J. U. Kim und Y. Renardy. Boundary control of the Timoshenko beam. *SIAM J. Contr. Optim.*, 25(6):1417–1429, 1987.
- [3] J. Redaud, J. Auriol und Y. Le Gorrec. In-domain damping assignment of a Timoshenko-beam using state feedback boundary control. In: *2022 IEEE 61st Conference on Decision and Control (CDC)*, S. 5405–5410, 2022.
- [4] F. Woittennek und J. Rudolph. Controller canonical forms and flatness based state feedback for 1D hyperbolic systems. *IFAC Proceedings Volumes*, S. 792–797, 2012.