Zur Approximation von Operatoren im Kontext von Totzeitsystemen mittels einer Spektralmethode

T. H. Scholl, L. Gröll

Institut für Automation und angewandte Informatik (IAI), Karlsruher Institut für Technologie (KIT), Hermann-von-Helmholtz-Platz 1, 76344 Eggenstein-Leopoldshafen, Tel: +49 721 608-25807, E-Mail: {tessina.scholl, lutz.groell}@kit.edu

Sobald in einem geschlossenen Regelkreis eine Totzeit $h > 0$ auftritt, wird aus einer gewöhnlichen Differentialgleichung eine Funktionaldifferentialgleichung. Schließlich muss in einem Anfangswertproblem für

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + A_1 x(t-h), \qquad A_0, A_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}, \tag{1}$$

eine Anfangsfunktion $x_0 \in C([-h, 0], \mathbb{R}^n)$ vorgegeben und fortwährend das Lösungssegment $x_t \colon [-h, 0] \to \mathbb{R}^n;\ \theta \mapsto x_t(\theta) = x(t+\theta)$ über dem vorangegangenen Totzeitintervall $[t-h, t]$ als Zustand angesehen werden. Wir betrachten das Paar aus dem Zustand $x_t(\cdot) \in C$ und dem Wert $x_t(0) = x(t) \in \mathbb{R}^n$ und verwenden die Einbettung

$$\left[\begin{smallmatrix} x_t \\ x(t) \end{smallmatrix}\right] \in C \times \mathbb{R}^n \subset L_2 \times \mathbb{R}^n =: M_2. \tag{2}$$

Die Dynamik von $\left[\begin{smallmatrix} x_t \\ x(t) \end{smallmatrix}\right]$ wird durch eine abstrakte Differentialgleichung

$$\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left[\begin{smallmatrix} x_t \\ x(t) \end{smallmatrix}\right] = \mathscr{A} \left[\begin{smallmatrix} x_t \\ x(t) \end{smallmatrix}\right] \tag{3}$$

mit einem Operator $\mathscr{A} \colon M_2 \supset D(\mathscr{A}) \to M_2$ beschrieben, siehe [2]. In Anwendungsfällen, in denen im totzeitfreien Fall matrixwertige Lyapunov- oder algebraische Riccati-Gleichungen von Interesse sind, rücken folglich operatorwertige Lyapunov- oder algebraische Riccati-Gleichungen mit einer Operatorlösung $\mathscr{P} \colon M_2 \to M_2$ in den Fokus.

Mittels numerischer Methoden, die von partiellen Differentialgleichungen bekannt sind, können endlichdimensionale Approximationen der Operatoren erlangt werden. Spektralmethoden, wie die Legendre-Tau-Methode, approximieren zu jedem Zeitpunkt $t \geq 0$ den Zustand x_t des Systems durch ein Polynom vorgegebenen Grades [3, 1]. Das Ergebnis ist eine gewöhnliche Differentialgleichung $\dot{x}_\mathrm{c}(t) = A_\mathrm{c} x_\mathrm{c}(t)$ für den Koordinatenvektor $x_\mathrm{c}(t)$, der dieses Polynom (und damit auch das Paar aus Polynom und dessen Endpunkt) eindeutig bestimmt. Dementsprechend repräsentiert die Matrix A_c eine Approximation des Operators $\mathscr{A}$. Darauf basierend lassen sich zudem matrixwertige Lyapunov- [7] oder algebraische Riccati-Gleichungen [4, 6] aufstellen, deren matrixwertiges Ergebnis P_c wiederum auf eine Approximation der Operatorlösung $\mathscr{P}$ abzielt.

Jegliche Rechnungen mit den Operatoren (z.B. Operatornormen, Berechnung adjungierter Operatoren, Operatorgleichungen) übertragen sich auf Rechnungen mit den Matrizen. Dabei ist aber Vorsicht geboten, denn die zugrundeliegenden polynomialen Basisfunktionen sind in M_2 nicht orthonormal. Zudem sind die repräsentierten Operatoren nicht nur auf polynomiale Argumente anwendbar.

Der Beitrag betrachtet Operatorapproximationen, die durch Matrizen aus der Legendre-Tau-Methode repräsentiert werden. Aufbauend auf [5] und [8, Anhang A], liegt der Schwerpunkt des Beitrags auf einer Beschreibung der Zusammenhänge zwischen den Matrizen, den Operatorapproximationen und den exakten Operatoren.

Literatur

[1] Breda, D.; Diekmann, O.; Gyllenberg, M.; Scarabel, F.; Vermiglio, R.: Pseudospectral discretization of nonlinear delay equations: New prospects for numerical bifurcation analysis. *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*, 15(1):1–23, 2016.

[2] Curtain, R.; Zwart, H.: *Introduction to Infinite-Dimensional Systems Theory*. Springer, New York, NY, 2020.

[3] Hesthaven, J. S.; Gottlieb, S.; Gottlieb, D.: *Spectral methods for time-dependent problems*. Cambridge University Press, Cambridge, 2007.

[4] Ito, K.; Teglas, R.: Legendre-tau approximation for functional differential equations part II: The linear quadratic optimal control problem. *SIAM J. Control Optim.*, 25 (6):1379–1408, 1987.

[5] Scholl, T. H.; Gröll, L.: From matrices to operators: A tensorial view on the Legendre tau method for time-delay systems. *IFAC-PapersOnLine*, im Druck, 2025. (Präsentiert auf dem 19. IFAC Workshop on Time Delay Systems in Gif-sur-Yvette, Frankreich, 30. Juni - 2. Juli 2025.)

[6] Scholl, T. H.; Hagenmeyer, V.; Gröll, L.: Lyapunov-Krasovskii functionals of robust type and their Legendre-tau-based approximation. *IFAC-PapersOnLine*, 58(27):219–224, 2024. (Präsentiert auf dem 18. IFAC Workshop on Time Delay Systems in Udine, Italien, 24.-27. September 2024.)

[7] Scholl, T. H.; Hagenmeyer ,V.; Gröll, L.: What ODE-approximation schemes of time-delay systems reveal about Lyapunov–Krasovskii functionals. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 69(7):4614–4629, 2024.

[8] Scholl, T. H.: *Stability in time-delay systems*. Dissertation, Karlsruhe Institute of Technology (KIT), Karlsruhe, 2024.