Backstepping für eine Klasse linearer PDAE-DAE-Systeme

J. Zimmer, J. Deutscher

Institut für Mess-, Regel- und Mikrotechnik, Universität Ulm
E-Mail: {julian.zimmer, joachim.deutscher}@uni-ulm.de

Die Backstepping-Methode ist ein mittlerweile etabliertes Reglerentwurfsverfahren für verteilt-parametrische Systeme basierend auf Normalformen (siehe [5]). Allerdings beschränken sich bisherige Ergebnisse auf PDE-Systeme. In Anwendungen kommen häufig Systeme vor, die durch partielle differential-algebraische Gleichungen (engl.: Partial Differential Algebraic Equations (PDAE)) beschrieben werden. Diese werden im regelungstechnischen Kontext auch als unendlich-dimensionale Deskriptorsysteme bezeichnet. Sie beinhalten partielle Differentialgleichungen sowie (differential-) algebraische Gleichungen, wodurch komplexere Netzwerke beschrieben werden können. Eine Erweiterung der PDAE-Systeme durch eine Randkopplung mit DAE-Systemen ermöglicht darüber hinaus die Berücksichtigung von konzentriert-parametrischer Dynamik. Ein typisches Beispiel ist die Modellierung von Wärmeleitungsproblemen bei Halbleiterbauelementen (siehe z. B. [1]) oder Übertragungsleitungen (siehe z. B. [3]). Ein weiteres Beispiel stellen Gasnetze dar, bei denen das transiente Verhalten durch Euler-Gleichungen beschrieben wird (siehe z. B. [4]).

In diesem Beitrag wird ein Backstepping-Reglerentwurf für eine Klasse von vollständig aktuierten linearen PDAE-DAE-Systemen vorgestellt, die sich durch

$$\begin{aligned}
E\dot{x}(z,t) &= Fx'(z,t) + Ax(z,t), \quad \operatorname{rg}E = r < n \\
Q_0 x(0,t) &= B_0 v(t) \\
Q_1 x(1,t) &= B_1 u(t) \\
E_0 \dot{v}(t) &= F_0 v(t) + Hx(0,t), \qquad \operatorname{rg}E_0 = r_0 < n_0
\end{aligned}$$

beschreiben lässt. Darin bezeichnet $x(z,t) \in \mathbb{R}^n$ die verteilt-parametrische und $v(t) \in \mathbb{R}^{n_0}$ die konzentriert-parametrische Deskriptorvariable sowie $u(t) \in \mathbb{R}^p$ den Eingang. Es wird vorausgesetzt, dass die Anfangsbedingungen konsistent sind und die regulären Matrixbüschel (E, F), (E_0, F_0) den Differentiationsindex 1 besitzen.

Für den Reglerentwurf wird das unendlich-dimensionale Deskriptorsystem mit Hilfe der Weierstraß-Normalform analytisch entkoppelt (siehe [6, 7]). Dadurch ergeben sich heterodirektionale hyperbolische PDEs, verteilte zeitliche und verteilte örtliche ODEs sowie ein DAE-Teilsystem. Durch Auflösen des algebraischen Teilsystems der DAE und der verteilten örtlichen ODE kann das entkoppelte PDAE-DAE-System in ein hyperbolisches PDE-ODE-System mit verteilter zeitlicher ODE überführt werden, die sich als eine hyperbolische PDE mit Transportgeschwindigkeit Null auffassen lässt (siehe [2]). Für das resultierende System

$$\begin{aligned}
\dot{\tilde{x}}_1(z,t) &= \Lambda\tilde{x}_1'(z,t) + \tilde{A}_{11}\tilde{x}_1(z,t) + \tilde{A}_{12}(z)x_2(z,t) \\
\dot{x}_2(z,t) &= \tilde{A}_{21}(z)\tilde{x}_1(z,t) + A_{22}x_2(z,t) \\
\dot{v}_1(t) &= \bar{J}_0 v_1(t) + \tilde{H}_{11}\tilde{x}_1^-(0,t) \\
\tilde{x}_1^+(0,t) &= \tilde{Q}_+\tilde{x}_1^-(0,t) + \tilde{Q}_v v_1(t) \\
\tilde{x}_1^-(1,t) &= \tilde{u}_1(t)
\end{aligned}$$

wird mit der Annahme, dass $(\bar{J}_0, \tilde{H}_{11})$ steuerbar und A_{22} eine Hurwitzmatrix ist, ein backstepping-basierter Regler entworfen. Dabei erfolgt eine sukzessive Entkopplung und Stabilisierung der einzelnen Teilsysteme. Die Ergebnisse des Reglerentwurfs werden anhand eines elektrischen Netzwerks mit zwei Übertragungsleitungen und einer verteilten Kapazität veranschaulicht und in Simulationen validiert.

Literatur

[1] Bartel, A.: First order thermal PDAE models in electric circuit design. In: *Proc. MATHMOD, Vienna, Austria* (2003), S. 1376–1381

[2] de Andrade, G. ; Vazquez, R. ; Karafyllis, I. ; Krstic, M.: Backstepping control of a hyperbolic PDE system with zero characteristic speed states. In: *IEEE Trans. Autom. Control* 69 (2024), S. 6988–6995

[3] Günther, M.: A PDAE model for interconnected linear RLC networks. In: *Math. Comp. Mod. Dyn. Syst.* 7 (2001), S. 189–203

[4] Herty, M.: Modeling, simulation and optimization of gas networks with compressors. In: *Networks & Heterogeneous Media* 2 (2007), S. 81–97

[5] Krstic, M. ; Smyshlyaev, A.: *Boundary Control of PDEs — A Course on Backstepping Designs*. Philadelphia : SIAM, 2008

[6] Martinson, W. ; Barton, P.: Index and characteristic analysis of linear PDAE systems. In: *SIAM J. Sci. Comput.* 24 (2003), S. 905–923

[7] Zimmer, J. ; Deutscher, J.: Backstepping control of linear partial differential-algebraic equations using the Weierstraß normal form. In: *Proc. Conference on Decision and Control (CDC), Rio de Janeiro, Brazil* (2025). – angenommen