

Experimentelle Untersuchungen einer modellprädiktiven Regelung mit symplektischer Diskretisierung an einem Zweipendelsystem

M. Klein, A. Othmane, K. Flaßkamp

Modellierung und Simulation technischer Systeme, Universität des Saarlandes, Campus Gebäude A5 1, 66123 Saarbrücken,
E-Mail: {mikl00006, amine.othmane, kathrin.flasskamp}@uni-saarland.de

Das Grundprinzip der (nichtlinearen) modellprädiktiven Regelung besteht in der wiederholten Lösung eines nichtlinearen Optimalsteuerungsproblems über einen endlichen Prädiktionshorizont [1]. Eine wesentliche Voraussetzung für die praktische Umsetzung ist die zeitliche Diskretisierung der Systemdynamik, die üblicherweise mittels Runge-Kutta-Verfahren erfolgt. Alternativ können auch Variationsintegratoren eingesetzt werden [2], die per Konstruktion symplektisch sind, da sie auf einer Diskretisierung des Wirkungsfunktional basieren [3]. In diesem Beitrag wird untersucht, welchen Einfluss die symplektische Diskretisierung im Vergleich zu etablierten Runge-Kutta-Verfahren auf die modellprädiktive Regelung hat.

Ausgangspunkt der variationellen Diskretisierung ist eine diskrete Lagrange-Funktion L_d , die das Wirkungsintegral über einen Zeitschritt annähert. Aus dem diskreten Hamiltonschen Prinzip [3] folgen die diskreten Euler-Lagrange-Gleichungen

$$D_2 L_d(q_{k-1}, q_k, h_{k-1}) + D_1 L_d(q_k, q_{k+1}, h_k) + f_d^-(q_k, q_{k+1}, h_k) + f_d^+(q_{k-1}, q_k, h_{k-1}) = 0, \quad (1)$$

wobei q_k die Konfiguration zum Zeitpunkt t_k , h_k die Schrittweite und $f_d^\pm$ die diskreten äußeren Kräfte bezeichnen. Ferner stehen D_1 und D_2 für die partiellen Ableitungen der diskreten Lagrange-Funktion nach ihrem ersten bzw. zweiten Konfigurationsargument. Gleichung (1) koppelt jeweils drei aufeinanderfolgende Konfigurationen und kann im Optimalsteuerungsproblem als Gleichungsnebenbedingung eingeführt werden, wie es in der diskreten Mechanik und Optimalsteuerung üblich ist [2]. Für die diskreten Impulse an den Zeitknoten erhält man die Darstellungen

$$p_k = -D_1 L_d(q_k, q_{k+1}, h_k) - f_d^-(q_k, q_{k+1}, h_k), \quad p_{k+1} = D_2 L_d(q_k, q_{k+1}, h_k) + f_d^+(q_k, q_{k+1}, h_k),$$

die es ermöglichen, Gleichung (1) als implizites Einschrittverfahren zu implementieren [3].

Die experimentellen Untersuchungen werden an einem erweiterten Furuta-Pendel durchgeführt, dessen Grundprinzip auf dem klassischen Furuta-Pendel basiert [4, 5]. Dieser in Abbildung 1 dargestellte Aufbau wurde an der Universität des Saarlandes als eine modulare, Open-Source-Plattform zum Einsatz in Forschung und Lehre entwickelt [6]. Ein um die Hochachse angetriebener Körper trägt zwei unabhängig gelagerte Pendel unterschiedlicher physikalischer Eigenschaften. Mit dem Winkel des Körpers und den Pendelwinkeln ergeben sich drei Freiheitsgrade bei nur einem Stelleingang.

Betrachtet wird in dieser Arbeit das nichtlineare Regelungsproblem, eines der beiden Pendel aus der hängenden Ruhelage ohne vorberechnete Referenztrajektorie aufzuschwingen und anschließend in der instabilen oberen Ruhelage zu stabilisieren. Gleichzeitig wird angestrebt, die Auslenkung des zweiten Pendels möglichst gering zu halten. Hierzu wird das Regelungsproblem als nichtlineares Optimalsteuerungsproblem über einen endlichen

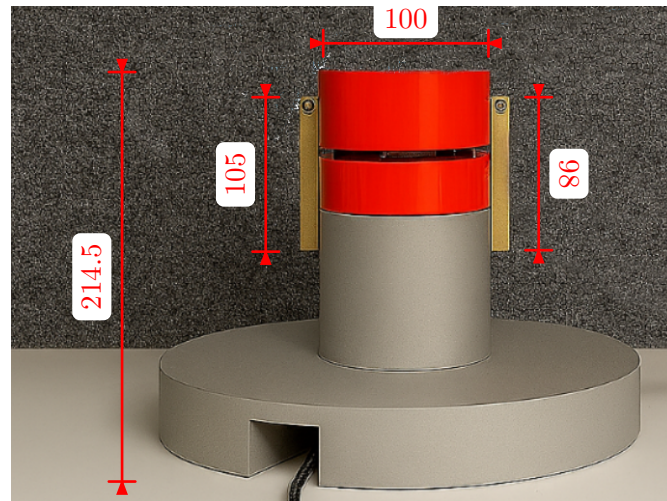


Abbildung 1: Versuchsaufbau des Zweipendelsystems mit annotierten Abmessungen in mm. Elektronische Komponenten sind nicht abgebildet.

Horizont formuliert, dessen wiederholte Lösung die Grundlage der eingesetzten modellprädiktiven Regelung bildet. Deren echtzeitfähige Implementierung erfolgt über *acados* [7]. Der Vergleich der symplektischen Diskretisierung mit klassischen Runge-Kutta-Verfahren auf äquidistanten und nichtuniformen Zeitgittern, wie sie beispielsweise in [5] verwendet werden, erfolgt anhand experimenteller Untersuchungen zur Regelgüte, zum Stellaufwand und zur Echtzeitfähigkeit der Implementierung.

Literatur

- [1] J. B. Rawlings, D. Q. Mayne, und M. Diehl. *Model Predictive Control: Theory, Computation, and Design*. 2. Auflage, Nob Hill, San Francisco, 2020.
- [2] S. Ober-Blöbaum, O. Junge, und J. E. Marsden. Discrete mechanics and optimal control: An analysis. *ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations*, 17(2):322–352, 2011, doi:10.1051/cocv/2010012.
- [3] J. E. Marsden und M. West. Discrete mechanics and variational integrators. *Acta Numerica*, 10:357–514, 2001, doi:10.1017/S096249290100006X.
- [4] K. Furuta, M. Yamakita, und S. Kobayashi. Swing-up control of inverted pendulum using pseudo-state feedback. *Proc. Inst. Mech. Eng., I, J. Syst. Control Eng.*, 206(4):263–269, 1992, doi:10.1243/PIME_PROC_1992_206_341_02.
- [5] H. Homburger, J. Frey, S. Wirtensohn, M. Diehl, und J. Reuter. Millisecond NMPC for swing-up and stabilization of the Furuta pendulum in real world. *IEEE Trans. on Control Systems Technology*, 2025. doi:10.1109/TCST.2025.3616367.
- [6] A. Othmane. SMS Pendulum Systems (Version 1.0) [Computer software], 2026, Zenodo, doi:10.5281/zenodo.21875325
- [7] R. Verschueren et al. *acados* – a modular open-source framework for fast embedded optimal control. *Mathematical Programming Computation*, 14(1):147–183, 2022, doi:10.1007/s12532-021-00208-8.