

An RKHS perspective on algebraic estimator analysis and design

Matti Noack[†], Timm Faulwasser[†]

[†] Institute of Control Systems, TU Hamburg, Harburger Schloßstraße 22a, 21079 Hamburg ,
E-Mail: {matti.noack, timm.faulwasser}@tuhh.de

Algebraische Schätzerentwurfsverfahren und dabei insbesondere die Modulationsfunktionsmethode (MFM) haben sich für eine Vielzahl relevanter Problemstellungen etabliert wie etwa der Zustandsbeobachtung [3, 7, 8], Parameteridentifikation [1, 2] und die Rekonstruktion unbekannter Eingangssignale [6] sowie von Signalableitungen beliebiger Ordnung [4, 9]. Ursprünglich von der zeitkontinuierlichen Perspektive aus eingeführt [1], um lineare Differentialgleichungen direkt in eine Regressorform zu überführen, die konventionelle Parameterbestimmung ermöglicht, wurde die MFM seither stetig weiterentwickelt. Unter Anderem gab es Erweiterungen zur Anwendung auf zeitvariante [6, 11] sowie nicht-lineare Modelle bishin zu verteiltparametrischen Systemklassen.

Der zentrale Mechanismus besteht aus Integration mit der frei wählbaren Modulationsfunktion (MF) $\varphi \in \mathcal{H}^{n-1}(I)$ über das Zeitintervall I auf das Signal Ly , wobei $y \in \mathcal{L}_2^{\text{loc}}$ ein Messsignal und L einen linearen Differentialoperator der Ordnung $n \in \mathbb{N}$ ist. Dies wird als Skalarprodukt in $\mathcal{L}_2(I)$ dargestellt

$$\langle \varphi, Ly \rangle_{\mathcal{L}_2(I)} = \int_I \varphi(\tau) Ly(\tau) d\tau \stackrel{\text{RB}}{=} \langle L^* \varphi, y \rangle_{\mathcal{L}_2(I)}, \quad (1)$$

wobei eine Übertragung des Differentialoperators in adjungierter Form L^* hin zur MF stattfindet, wenn geeignete Randbedingungen (RB) ausgewählt sind. Dadurch können Differentialgleichungsprobleme in einen Satz algebraischer Gleichungssysteme überführt werden. Dies hat den zentralen Vorteil, dass bei Anwendung auf endlichem Horizont $I = [0, T], T \in \mathbb{R}$ ein Konvergenzverhalten in endlicher Zeit erzielt wird. Zugleich ermöglicht die integrale Realisierung des Schätzers eine natürliche Unterdrückung von Messrauschen und die Form der MF φ bestimmt maßgeblich dieses Filterverhalten. In der Regel wird die MFM über einen gleitenden Zeithorizont $[t - T, t]$ umgesetzt, was häufig in der Implementierung eines FIR Filters resultiert. Zudem gestattet die algebraische Struktur die einfache Konstruktion simultaner und adaptiver Schätzalgorithmen [6, 7]. Allerdings liegt eine der größten Herausforderungen in der geeigneten Wahl der MF innerhalb der vorgegebenen RB, um zum Beispiel bestimmte Robustheitsziele zu erreichen.

Das innere Produkt aus Gleichung (1) legt eine Sichtweise der MFM als Projektion innerhalb von bestimmten Hilberträumen nahe. In der Tat existieren innerhalb des MF Feldes bereits verschiedenste Betrachtungsweisen, die sich diesen Zusammenhang zu Nutze machen [3]. Schon früh begann [2] die Orthogonalitätseigenschaften in $\mathcal{L}_2$ zur Analyse und der Wahl von Modulationskernen zu nutzen. Diese spielen insbesondere beim algebraischen Differenzieren eine wesentliche Rolle [9], wobei das Annihilieren von Signalkomponenten in [4] aus der Klasse der *Reproducing Kernel Hilbert Spaces* (RKHS) heraus motiviert wurde. Weiterhin wird dadurch die Grundlage für die Schätzung unbekannter Eingänge gelegt [6]. Ein weiterer spezieller Ansatz zur MF Verwendung ist das sogenannte *Generalized Sampling* eingeführt von [5], womit eine zeitkontinuierliche Variante des Fundamentallemmas zur Daten-getriebenen Anwendung hergeleitet wird. In [8] werden auf der anderen Seite Volterra-Integrale mit MFs als Integralkern zum algebraischen Beobachterentwurf über einen wachsenden Horizont verwendet. Dadurch werden auch Fehlerabschätzungen

ähnlich zu den $\mathcal{L}_2$ aus [11] möglich. Die Zusammenhang mit schwachen Lösungen und der MF als Testfunktion wird von [10] herausgestellt. Hierbei wird gerade die Verbindung zu Sobolev-Räumen deutlich.

Die Verwendung der MF als Kern wird von den aufgeführten Arbeiten bereits angedeutet und genutzt. Die RKHS Perspektive einzunehmen, ermöglicht entsprechend der *Reproducing Property* die Charakterisierung des Signalraumes über die Kernfunktion. Dies eröffnet neue Analyse- und Entwurfs Optionen für die MFM. Der Präsentationsbeitrag verfolgt diese vereinheitlichende Betrachtungsweise des MF Ansatzes und setzt diesen in den RKHS Kontext. Das Ziel ist es, von den Werkzeugen aus dem etablierten Gebiet der RKHS-basierten Schätzung gezielt beim der Evaluation und dem Design algebraischer Schätzmethoden zu profitieren. Auf der anderen Seite ermöglicht dies aber auch Anwendern aus dem RKHS Bereich auf die zahlreichen Problemlösungsstrukturen der MFM zurückgreifen zu können.

Literatur

- [1] Shinbrot, M.: On the analysis of linear and nonlinear dynamical systems from transient-response data, *NACA*, Washington D.C., Tech. Rep., 1954.
- [2] Kraus, F. J.; Senning, M. F.: Signal Adapted Modulation Functions for Identification of Linear Continuous Time Systems, *IFAC Proceedings*, 20, S. 245–250, 1987.
- [3] Byrski, W.: The survey for the exact and optimal state observers in Hilbert spaces, *ECC*, S. 3548–3553, 2003.
- [4] Mboup, M. and Join, C. and Fliess, M.: Numerical Differentiation with Annihilators in Noisy Environment, *Numerical Algorithms*, 50, 4, S. 439–467, 2009.
- [5] Kinoshita, Y.; Ohta, Y.: Continuous-time system identification using compactly-supported filter kernels generated from Laguerre basis functions, *49th IEEE CDC*, S. 4461–4466, 2010.
- [6] Liu, D.; Laleg-Kirati, T.-M.; Perruquetti, W.; Gibaru, O.: Non-asymptotic state estimation for a class of linear time-varying systems with unknown inputs, *IFAC World Congress*, S. 3732–3738, 2014.
- [7] Jouffroy, J.; Reger, J.: Finite-time simultaneous parameter and state estimation using modulating functions, *IEEE Conference on Control Applications*, S. 394–399, 2015.
- [8] Pin, G.; Chen, B.; Parisini, T.: Robust Deadbeat Continuous-Time Observer Design Based on Modulation Integrals, *Automatica*, 107, S. 95–102, 2019.
- [9] Othmane, A.; Kiltz, L.; Rudolph, J.: Survey on Algebraic Numerical Differentiation: Historical Developments, Parametrization, Examples, and Applications, *International Journal of Systems Science*, 53, 7, S. 1848–1887, 2022.
- [10] Messenger, D. A.; Tran, A.; Dukic, V.; Bortz, D. M.: The Weak Form Is Stronger Than You Think, *arXiv*, 2409.06751 [cs], 2024.
- [11] Noack, M.; N’Doye, I.; Reger, J.; Laleg-Kirati, T.-M.: Modulating Function-Based Algebraic Observer Coupled with Stable Output Predictor for LTV and Sampled-Data Systems, *Automatica*, 183, S. 112696, 2026.