

Datengetriebene iterative Methode zur Modellreduktion bilinearer Systeme

J. Lilienblum[†], I. V. Gosea[†], P. Benner[†]

[†]Max-Planck-Institut für Dynamik komplexer technischer Systeme, Sandtorstraße 1, 39106 Magdeburg, Tel: ++49(0)391-6110806, E-Mail: {lilienblum, gosea, benner}@mpi-magdeburg.mpg.de

Moderne numerische Verfahren beinhalten in der Regel die Berechnung großskaliger dynamischer Systeme, die schnell und zuverlässig erfolgen muss. Hierfür wird bevorzugt die Theorie der Modellordnungsreduktion (MOR) ausgenutzt. Viele Klassen nichtlinearer Systeme mit analytischen Nichtlinearitäten können dabei gut durch bilineare Systeme approximiert werden. Diese Systeme verbinden direkt die inneren Zustände $\mathbf{x}(t)$ mit der Eingabegröße $\mathbf{u}(t)$. Im Fall eines Single-input Single-output (SISO)-bilinearen Systems ergibt sich folgende Darstellung:

$$\Sigma_B : \begin{cases} \mathbf{E}\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{N}\mathbf{x}(t)\mathbf{u}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), & \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t), \end{cases}$$

wobei $\mathbf{E}, \mathbf{A}, \mathbf{N} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $\mathbf{E}$ als regulärer Matrix, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ und $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{1 \times n}$. Die Eingabe ist gegeben durch $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}$ und die Ausgabe durch $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}$ für $t > 0$. Dabei lassen sich Modellreduktionsmethoden in projektionsbasierte Ansätze und datengestützte Methoden einteilen. Letztere umfassen beispielsweise Loewner-Matrix-Algorithmen, die eine gute Alternative zu projektionsbasierten Methoden darstellen. Im Loewner-Ansatz werden die reduzierten Systemmatrizen durch Auswertung von Funktionswerten der Übertragungsfunktion berechnet an gewissen Interpolationspunkten berechnet, wobei dieser Ansatz in [1] eingeführt wurde. Für unseren Ansatz verwenden wir Übertragungsfunktionen verschiedener Ordnungen im Frequenzbereich:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_1(s_1) &= \mathbf{C}(s_1\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} \\ \mathbf{H}_2(s_1, s_2) &= \mathbf{C}(s_2\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{N}(s_1\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} \\ \mathbf{H}_3(s_1, s_2, s_3) &= \mathbf{C}(s_3\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{N}(s_2\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{N}(s_1\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} \end{aligned}$$

Dabei spielt der Iterative Rationale Krylov-Algorithmus (IRKA) eine zentrale Rolle, da er den iterativen Faktor mit einbezieht. Damit steht eine Methode zur Berechnung der reduzierten Matrizen auf projektionsbasierter Weise zur Verfügung [2]. Dieser Algorithmus wurde mit dem Loewner-Ansatz im TF-(Transfer function)-IRKA-Verfahren für LTI-Systeme verknüpft [3]. Darüber hinaus wurde IRKA ebenfalls auf bilineare Systeme angewandt, wobei der B-(bilineare)-IRKA-Algorithmus in [4] entwickelt wurde. Ziel ist es, eine neuartige Methode zur Verbindung dieser Varianten zu entwickeln. Daher wird dieser Algorithmus als Transferfunktionsbasiertes Bilineares Iteratives Rationales Krylov-Verfahren (TF-BIRKA) bezeichnet. Als Ausgangspunkt werden dabei die zugrundeliegenden Sylvester-Gleichungen verwendet, um die reduzierten Matrizen (die sogenannten erweiterten oder verallgemeinerten Loewner-Matrizen) ausschließlich auf Basis von Proben der Übertragungsfunktionen verschiedener Ordnungen zu konstruieren.

Die entsprechenden Sylvester-Gleichungen für die Erreichbarkeits- bzw. Beobachtbarkeits-

gramsche können folgendermaßen formuliert werden:

$$\begin{aligned}\mathbf{AV} + \mathbf{VA}^T + \mathbf{NVN}^T + \mathbf{BB}^T &= \mathbf{0} \\ \mathbf{A}^T\mathbf{W} + \mathbf{WA} + \mathbf{N}^T\mathbf{WN} + \mathbf{C}^T\mathbf{C} &= \mathbf{0}.\end{aligned}$$

Diese Gleichungen können in eine kaskadierte Form zerlegt werden. Das Einbeziehen unterschiedlich vieler der Teilgleichungen wird später zu unterschiedlichen Genauigkeitsstufen führen. Insgesamt erfolgt die Berechnung der reduzierten Matrizen im folgenden Schema:

$$\mathbb{L} = \mathbf{W}^T\mathbf{V}, \quad \mathbb{L}_s = \mathbf{W}^T\mathbf{AV}, \quad \mathbb{U} = \mathbf{W}^T\mathbf{B}, \quad \mathbb{S} = \mathbf{CV}, \quad \mathbb{T} = \mathbf{W}^T\mathbf{NV}.$$

Nun können die Projektionsmatrizen bis zu unterschiedlichen Genauigkeitsstufen aufaddiert werden, was den (h,l)-TF-BIRKA-Reduktionsansatz ergibt:

$$\mathbf{W} := \mathbf{W}^{(h)} = \mathbf{W}_1 + \dots + \mathbf{W}_h \text{ and } \mathbf{V} := \mathbf{V}^{(l)} = \mathbf{V}_1 + \dots + \mathbf{V}_l \text{ for } h, l \in \{1, 2\}.$$

Dies führt im (1, 2)-TF-BIRKA-Ansatz zu folgender Berechnung der Einträge der reduzierten Matrizen für $\mathbf{E}$ und $\mathbf{A}$:

$$\begin{aligned}(\mathbb{L}^{(1,2)})_{ij} &= \hat{c}_i \frac{\mathbf{H}_1(\lambda_i) - \mathbf{H}_1(\lambda_j)}{\lambda_i - \lambda_j} \hat{b}_j + \hat{c}_i \sum_{k=1}^r \frac{\mathbf{H}_2(\lambda_k, \lambda_i) - \mathbf{H}_2(\lambda_k, \lambda_j)}{\lambda_i - \lambda_j} \hat{b}_k \hat{N}_{jk} \\ (\mathbb{L}_s^{(1,2)})_{ij} &= \hat{c}_i \frac{\lambda_i \mathbf{H}_1(\lambda_i) - \lambda_j \mathbf{H}_1(\lambda_j)}{\lambda_i - \lambda_j} \hat{b}_j + \hat{c}_i \sum_{k=1}^r \frac{\lambda_i \mathbf{H}_2(\lambda_k, \lambda_i) - \lambda_j \mathbf{H}_2(\lambda_k, \lambda_j)}{\lambda_i - \lambda_j} \hat{b}_k \hat{N}_{jk}.\end{aligned}$$

Abschließend werden die Methoden anhand mehrerer Kriterien wie der Konvergenz der Interpolationspunkte und der Qualität der Approximationen verglichen. Dazu wurden $\mathcal{H}_2$ -Normen der Fehlersysteme berechnet (unter Verwendung des M.E.S.S.-Toolbox¹).

Literatur

- [1] Mayo, A. J.; Antoulas, A. C.: A framework for the solution of the generalized realization problem. *Linear Algebra and its Applications*, 425(2):634–662, 2007. Special Issue in honor of Paul Fuhrmann.
- [2] Gugercin, S.; Antoulas, A. C.; Beattie, C. A.: $\mathcal{H}_2$ Model Reduction for Large-Scale Linear Dynamical Systems. *SIAMMatrix*, 30(2):609–638, 2008.
- [3] Beattie, C. A.; Gugercin, S.: Realization-independent $\mathcal{H}_2$ -approximation. In *51st IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, pages 4953–4958, 2012.
- [4] Benner, P.; Breiten, T.: Interpolation-based $\mathcal{H}_2$ -model reduction of bilinear control systems. *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, 33(3):859–885, 2012.

¹<https://www.mpi-magdeburg.mpg.de/projects/mess>