

Zustands- und Parameterschätzung in adaptiv gekoppelten Kuramoto-Oszillatoren

T. N. Lundt*, A. Lepsien*, A. Schaum*

* Prozessanalytik und Computational Science Hub, Universität Hohenheim, Garbenstr. 23, 70599 Stuttgart, E-Mail: torben.lundt@uni-hohenheim.de

Netzwerke adaptiv gekoppelter Kuramoto-Oszillatoren dienen unter anderem als Paradigma für neuronale Aktivität, wobei sich die Kopplungsstärken mit der Phasendifferenz entwickeln, ein Analogon zur spike-timing-abhängigen Plastizität. Untersucht wurde in der Vergangenheit vor allem, welche Synchronisationszustände dabei auftreten [1]. Der Vortrag verfolgt hingegen die Frage, wie Kopplungsstärken und insbesondere Plastizitätsparameter zu wählen sind, sodass ein Oszillatorknetzwerk ein spezifisches Eingangs-Ausgangs-Verhalten erzeugt. Der Ansatz hierzu ist eine gemeinsame Zustands- und Parameterschätzung aus den gemessenen Phasen.

Betrachtet wird der Fall zweier Oszillatoren mit $i \neq j \in \{1, 2\}$,

$$\dot{\theta}_i = \omega_i + k_{ij} \sin(\theta_j - \theta_i), \quad \dot{k}_{ij} = -\gamma_{ij} k_{ij} + \mu_{ij} \Gamma(\theta_j - \theta_i),$$

mit dem Ausgang $y = [\theta_1 \ \theta_2]^T$, nicht messbaren k_{ij} , bekannten konstanten ω_i und unbekannten konstanten γ_{ij} und μ_{ij} .

Den Ausgangspunkt bildet eine Beobachtbarkeitsanalyse [2]. Das um die Parameter erweiterte System ist lokal beobachtbar, solange die Phasendifferenz hinreichend weit von Vielfachen von 2π entfernt bleibt und eine bei der Inversion der Beobachtbarkeitsabbildung auftretende Determinante nicht verschwindet. Typische Trajektorien verletzen beide Bedingungen wiederholt, die beobachtbaren Intervalle besitzen jedoch eine Mindestlänge, so dass ein Beobachter nicht unendlich schnell konvergieren muss. Dauerhaft wird der Verlust allein bei Phasensynchronisation, in der nur noch das Verhältnis μ_{ij}/γ_{ij} identifizierbar bleibt und die sich durch geeignete Eigenfrequenzen vermeiden lässt.

Darauf aufbauend werden zwei Entwürfe vorgestellt. Ein schaltender Beobachter [3] korrigiert nur innerhalb des beobachtbaren Bereichs und erreicht mit Hilfe der Mindestverweildauer Konvergenz im Mittel über die Schaltintervalle, wobei ein exakter Differenzierer höherer Ordnung die Ausgangsableitungen liefert. Ein Gradientenschätzer [4] verzichtet ganz auf die Zustandsschätzung. Nach Elimination der Kopplungsstärke ist die zweite Ausgangsableitung affin in den unbekannten Parametern, so dass ein Gradientenfluss auf dem Residuum genügt. Die Determinantenbedingung entfällt damit, und zwei statt vier Ableitungen je Phase reichen aus. Dieser Schätzer konvergiert schneller als ein erweiterter Kalman-Filter, verträgt Messrauschen jedoch schlechter. Analyse und Entwürfe werden im Zusammenhang dargestellt und anhand von Simulationsbeispielen demonstriert.

Literatur

- [1] Feketa, P.; Schaum, A.; Meurer, T.: Synchronization and multicluster capabilities of oscillatory networks with adaptive coupling, IEEE Trans. Autom. Control 66(7), S. 3084–3096, 2020.
- [2] Lundt, T. N.; Lepsien, A.; Feketa, P.; Meurer, T.; Schaum, A.: Parameter estimation in adaptively coupled Kuramoto oscillators, IFAC-PapersOnLine 59(26), S. 305–310, 2025.
- [3] Lundt, T. N.; Lepsien, A.; Schaum, A.: A sliding mode based switching observer for joint state and parameter estimation in adaptively coupled Kuramoto oscillators, Workshop on Variable Structure Systems, 2026.
- [4] Lundt, T. N.; Schaum, A.: Online parameter estimation for output-coupled nonlinear systems using exact differentiation, IFAC World Congress, 2026.