

Nichtlineare Backstepping-Regelung semilinearer parabolischer Systeme

J. Deutscher, F. Ruchti

Institut für Mess-, Regel- und Mikrotechnik, Universität Ulm,
E-Mail: {joachim.deutscher,finn.ruchti}@uni-ulm.de

In den vergangenen zwei Jahrzehnten hat sich der *Backstepping-Ansatz* als vielseitiges Werkzeug zur Regelung von linearen verteilt-parametrischen Systemen (SVP) weitestgehend etabliert (siehe [5] für einen aktuellen Überblick). Bei vielen Anwendungen muss für eine hinreichend genaue Modellbildung jedoch der nichtlineare Charakter des SVP berücksichtigt werden, ohne dabei auf eine Betriebspunktlinearisierung zurückzugreifen. Dies ist beispielsweise bei der Regelung von fluiddynamischen Systemen, flexiblen Strukturen sowie bei thermischen oder chemischen Systemen relevant.

Für nichtlineare endlich-dimensionale Systeme ist die *exakte Zustandslinearisierung* ein grundlegender Ansatz zur Stabilisierung der Ruhelage des Regelkreises. Durch eine nichtlineare Zustandstransformation wird das nichtlineare System auf eine Form gebracht, welche die Kompensation aller Nichtlinearitäten erlaubt (siehe [2]). Dies ermöglicht eine einfache Vorgabe der Abklingrate für die lokale exponentielle Konvergenz der Lösung gegen die Ruhelage. Es ist naheliegend dieses Entwurfsverfahren auch auf nichtlineare SVP zu verallgemeinern. Ein allgemeiner Backstepping-basierter Ansatz zur exakten Zustandslinearisierung für eine große Klasse semilinear parabolischer PDEs mit *Volterra-Nichtlinearitäten* wird in [6, 7] vorgestellt (siehe [4] für eine aktuelle Erweiterung auf nichtlineare hyperbolische Systeme). Dabei erfolgt die Bestimmung eines nichtlinearen Volterra-Reihenoperators durch Lösung einer unendlichen Anzahl kaskadierter linearer Kerngleichungen, um das semilineare parabolische System auf ein lineares Zielsystem zu transformieren. Die inhärente Komplexität dieser Methode schränkt deren Anwendbarkeit jedoch wesentlich ein. Kürzlich wurde in [1] ein neuartiger *flachheitsbasierter Ansatz* zur Rückführungslinearisierung semilinear parabolischer Systeme vorgeschlagen. Dieses Verfahren führt den Entwurf auf die Online-Lösung eines linearen zustandsabhängigen Cauchy-Problems zurück und erzielt eine asymptotische Stabilisierung der Ruhelage des Regelkreises.

In diesem Vortrag wird ein neuer Zugang zur nichtlinearen Backstepping-Regelung semilinear parabolischer Systeme vorgestellt. Dazu wird der nichtlineare Reaktionsterm in eine formal lineare Form mit einem zustandsabhängigen Koeffizienten umgeschrieben. Dies ermöglicht die direkte Anwendung klassischer Ergebnisse des linearen Backstepping-Entwurfs *ohne* Approximation des Systems, um die nichtlineare Backstepping-Transformation und die zugehörige nichtlineare Zustandsrückführung für die Transformation auf ein lineares parabolisches Zielsystem zu bestimmen. Die resultierenden zustandsabhängigen Kerngleichungen lassen sich mit dem in [3] vorgestellten Verfahren systematisch online lösen. Dazu wird durch eine örtliche Diskretisierung der Kern-Integralgleichung eine lineare zeitvariante *Kern-ODE* für die örtlichen Abtastwerte des Kerns hergeleitet. Da deren Ordnung quadratisch mit der Anzahl der Abtastpunkte wächst, erfolgt die Vorstellung eines alternativen numerischen Implementierungsschemas für den Backstepping-Regler. Dieses basiert auf einer *Polynomapproximation* des Kerns mit zeitabhängigen Koeffizienten, welche sich aus einer Differentialrekursion ergeben. Zu deren Lösung wird ein systematisches Verfahren vorgestellt, mit dem sich das Kern-Polynom für beliebige Grade eindeutig bestimmen lässt. Die Genauigkeit der resultierenden Polynomapproximation

kann sehr effizient anhand einer hochgenauen online-Bestimmung des Kerns systematisch verifiziert werden. Da der Kern in Form eines symbolischen Ausdrucks vorliegt, lässt er sich zur Laufzeit einfach auswerten. Dazu müssen allerdings die Koeffizienten des Reihenentwicklung des Streckenzustands bekannt sein, welche sich effizient mittels eines Koeffizientenmodells niedriger Ordnung zur Laufzeit bestimmen lassen. Der neue nichtlineare Backstepping-Reglerentwurf wird anhand eines semilinearen parabolischen Systems mit quadratischem Reaktionsterm in Simulationen validiert.

- [1] IRSCHIED, A. ; GEHRING, N. ; DEUTSCHER, J. ; RUDOLPH, J.: A new approach to boundary control of semilinear parabolic PDEs that yields linear tracking error dynamics. In: *Angenommen für EJC* (2026)
- [2] ISIDORI, A.: *Nonlinear Control Systems*. London : Springer-Verlag, 1995
- [3] JADACHOWSKI, L. ; MEURER, Th. ; KUGI, A.: An efficient implementation of backstepping observers for time-varying parabolic PDEs. In: *IFAC Proc. Vol. 45* (2012), S. 798–803. – 7th Vienna Int. Conf. Math. Mod.
- [4] KRSTIC, M.: Feedback linearization of hyperbolic PDEs with Volterra nonlinearities. (2026). <https://arxiv.org/abs/2604.27400>
- [5] VAZQUEZ, R. ; AURIOL, J. ; BRIBIESCA-ARGOMEDO, F. ; KRSTIC, M.: Backstepping for partial differential equations: A survey. In: *Automatica* 183 (2026). – Art. no. 112572
- [6] VAZQUEZ, R. ; KRSTIC, M.: Control of 1-D parabolic PDEs with Volterra nonlinearities, Part I: Design. In: *Automatica* 44 (2008), S. 2778–2790
- [7] VAZQUEZ, R. ; KRSTIC, M.: Control of 1-D parabolic PDEs with Volterra nonlinearities, Part II: Analysis. In: *Automatica* 44 (2008), S. 2791–2803