

Legendre-Tau als Zustandsraumrealisierung für Padé-Approximationen von Totzeitsystemen

T. H. Scholl, L. Gröll

Institut für Automation und angewandte Informatik (IAI), Karlsruher Institut für Technologie (KIT), Hermann-von-Helmholtz-Platz 1, 76344 Eggenstein-Leopoldshafen, Tel: +49 721 608-25807, E-Mail: {tessina.scholl, lutz.groell}@kit.edu

Tritt eine Totzeit $h > 0$ in einem geregelten System auf, führt die Beschreibung des geschlossenen Regelkreises im Zeitbereich üblicherweise auf eine retardierte Funktionaldifferentialgleichung der Form $\dot{x}(t) = f(x(t), x(t-h))$. Weist die rechte Seite Nichtlinearitäten oder Unsicherheiten auf, kann eine Darstellung als

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + A_1 x(t-h) + B a(C_0 x(t) + C_1 x(t-h)) \quad (1)$$

mit einer nichtlinearen oder unsicherheitsbehafteten Abbildung $a: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^m$ hilfreich sein, wobei $A_0, A_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C_0, C_1 \in \mathbb{R}^{p \times n}$. Dementsprechend sind LTI-Systeme mit Totzeit in der Zustands- und Ausgangsgleichung

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + A_1 x(t-h) + B u(t) \quad (2a)$$

$$y(t) = C_0 x(t) + C_1 x(t-h) \quad (2b)$$

relevant, die mit einer nichtlinearen oder unsicherheitsbehafteten Abhängigkeit $u = a(y)$ kombiniert werden können, um (1) darzustellen. In diesem Kontext von Lur'e-Systemen und Robustheitsbetrachtungen, etwa im Rahmen absoluter Stabilität oder, allgemeiner, integraler quadratischer Bedingungen (IQCs), spielt der Frequenzgang $G(i\omega)$ des linearen Nominalsystems (2) eine entscheidende Rolle.

Zur einfacheren Handhabung der Übertragungsfunktion

$$G(s) = (C_0 + C_1 e^{-sh})(sI_n - A_0 - A_1 e^{-sh})^{-1} B \quad (3)$$

wird in regelungstechnischen Lehrbüchern üblicherweise die rationale Approximation mittels Allpass-Padé-Approximation der enthaltenen Exponentialterme behandelt [6, 4]. Die weitreichende Theorie, siehe z.B. [2], ist in der Praxis jedoch dadurch eingeschränkt, dass bei Standardimplementierungen aufgrund numerischer Probleme von höheren Ordnungen abgeraten wird [4, 11].

Der Beitrag zeigt, dass die Legendre-Tau-Diskretisierung von (2) unmittelbar eine Zustandsraumrealisierung dieser Padé-basierten Approximation der Übertragungsfunktion darstellt. In Bezug auf die charakteristische Gleichung finden sich verwandte Ergebnisse in [3, 1]. Ein Äquivalenzresultat für die Übertragungsfunktion wurde unabhängig von [7] in [5] mit einem anderen methodischen Zugang hergeleitet, berücksichtigt jedoch nicht die für die oben genannte Anwendung wichtige Totzeit in der Ausgangsgleichung.

Das Legendre-Tau-LTI-System kann auch für hohe Approximationsordnungen mit geringem Implementierungsaufwand aufgestellt werden [10]. Zudem besteht ein direkter Bezug zur operatorwertigen Dynamikbeschreibung des funktionswertigen Zustands $x_t(\theta) = x(t+\theta)$, $\theta \in [-h, 0]$ von (2) [9]. Dieser Bezug ist in der genannten Anwendung besonders relevant, wenn der Kalman-Yakubovich-Popov (KYP)-basierte Zusammenhang zwischen Frequenzbereichsmethoden und Lyapunov-basierter Analyse im Zeitbereich genutzt werden soll [8].

Literatur

- [1] Mathieu Bajodek, Frédéric Gouaisbaut und Alexandre Seuret. Frequency delay-dependent stability criterion for time-delay systems thanks to Fourier–Legendre remainders. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 31(12):5813–5831, 2021.
- [2] K. Glover, J. Lam und J. R. Partington. Rational approximation of a class of infinite-dimensional systems II: Optimal convergence rates of L_∞ approximants. *Mathematics of Control, Signals and Systems*, 4(3):233–246, 1991.
- [3] K. Ito. Legendre-tau approximation for functional differential equations part III: Eigenvalue approximations and uniform stability. In: Franz Kappel, Karl Kunisch und Wilhelm Schappacher (Edits.), *Distributed Parameter Systems*, S. 191–212, Berlin, 1985. Springer.
- [4] J. Lunze. *Regelungstechnik 1*. Springer, Berlin, 2020.
- [5] Evert Provoost und Wim Michiels. The Lanczos tau framework for time-delay systems: Padé approximation and collocation revisited. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 62(6):2529–2548, 2024.
- [6] K. Reinschke. *Lineare Regelungs- und Steuerungstheorie*. Springer, Berlin, 2006.
- [7] Tessina H. Scholl. *Stability in time-delay systems*. Dissertation, Karlsruhe Institute of Technology (KIT), Karlsruhe, 2024.
- [8] Tessina H. Scholl. Lyapunov-Krasovskii functionals of robust type for the stability analysis in time-delay systems. *arXiv:2312.16738v3*, 2026.
- [9] Tessina H. Scholl und Lutz Gröll. From matrices to operators: A tensorial view on the Legendre tau method for time-delay systems. *IFAC-PapersOnLine*, 59(13):99–104, 2025. 19th IFAC Workshop on Time Delay Systems TDS 2025.
- [10] Tessina H. Scholl, Veit Hagenmeyer und Lutz Gröll. What ODE-approximation schemes of time-delay systems reveal about Lyapunov–Krasovskii functionals. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 69(7):4614–4629, 2024.
- [11] The MathWorks, Inc. *Control System Toolbox Reference*. Natick, MA, 2026.