

Aufgabe 1: (24 Punkte)

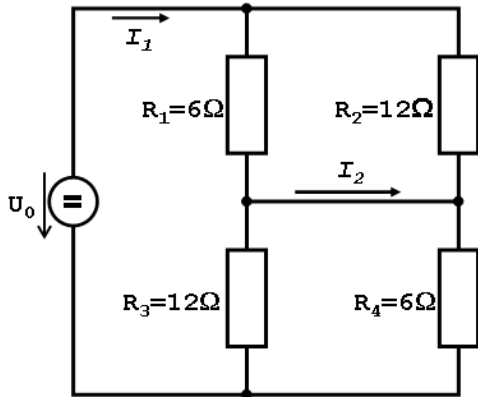


Bild 1

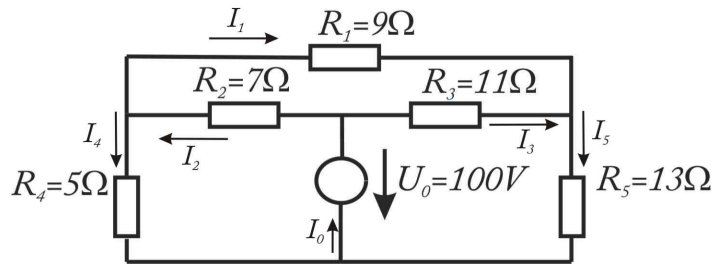


Bild 2

- a) Für die Schaltung in Bild 1 gilt : $U_0 = 20V$. Berechnen Sie die Werte von I_1 und I_2 .

Jetzt wollen wir die Zweigströme der Schaltung in Bild 2 durch Maschenanalyse berechnen.

- b) Zeichnen Sie den Graphen zu dieser Schaltung. Führen Sie einen Baum so ein, dass die Ströme durch R_1 , R_4 und R_5 möglichst einfach zu berechnen sind. Übertragen Sie anschließend die Schaltung in Ihr Lösungsblatt und zeichnen Sie die Maschenströme ein.
- c) Stellen Sie jetzt die im Bild 2 dargestellten Zweigströme als lineare Kombinationen von Maschenströmen dar. Wann hat ein Zweigstrom einen gleichen Betrag wie ein Maschenstrom? Jetzt können wir für die Maschen die Maschenstromregel anwenden.
- d) Stellen Sie das notwendige Gleichungssystem zur Berechnung der Maschenströme auf.
- e) Bestimmen Sie durch die Lösung des Gleichungssystems die unbekanntenen Zweigströme.

Aufgabe 2: (12 Punkte)

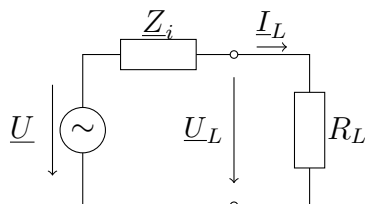


Bild 3

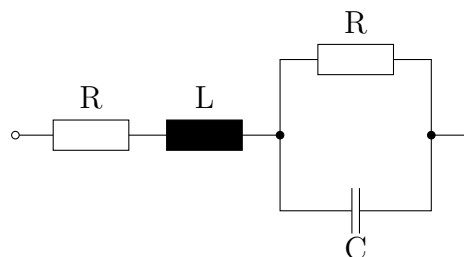


Bild 4

Im Folgenden soll die von dem Lastwiderstand R_L (Bild 3) aufgenommene Wirkleistung berechnet werden. Die Innenimpedanz Z_i der Quelle ist durch die Schaltung aus Bild 4 gegeben.

- Geben Sie die Innenimpedanz \underline{Z}_i (Bild 4) nach Real- und Imaginärteil getrennt an.
- Finden Sie zwei reelle Winkelfrequenzen $\omega \geq 0$ für welche der Imaginärteil der Innenimpedanz verschwindet.
- Geben Sie den jeweiligen Wert der Impedanz für die in Teil b) gefundenen Frequenzen an.
- Berechnen Sie nun allgemein (\underline{Z}_i als Variable verwenden!) die von dem Lastwiderstand R_L (Bild 3) aufgenommene Wirkleistung und setzen sie anschließend in das Ergebnis die Werte aus dem vorherigen Aufgabenteil ein.

Aufgabe 3: (13 Punkte)

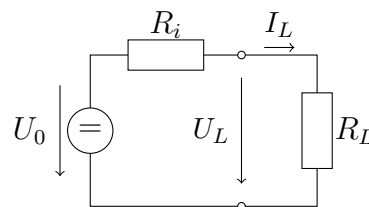


Bild 5

Für die Schaltung aus Bild 5 wird ein geeigneter Widerstand R_i gesucht, der die zwei folgenden Bedingungen erfüllt:

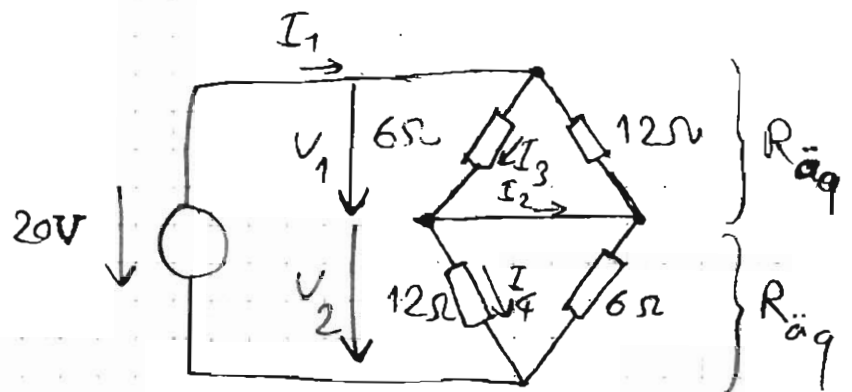
- Der Widerstand R_i darf maximal 25% der gesamten Leistung aufnehmen.
- Die Spannung U_L darf 4.5V nicht überschreiten.

Es gelten folgende Werte: $U_0 = 5V$ und $R_L = 25\Omega \dots 50\Omega$.

Geben Sie ein Widerstandsnetzwerk aus 10Ω -Widerständen an, dass die beiden Bedingungen erfüllt und zeichnen Sie eine reale Ersatzstromquelle, welche dieses Widerstandsnetzwerk als Innenwiderstand verwendet.

Aufgabe 1

a)



$$R_{\text{äq}} = \frac{6\Omega \cdot 12\Omega}{6\Omega + 12\Omega} = 4\Omega$$

$$I_1 = \frac{20\text{V}}{2 R_{\text{äq}}} = 2,5\text{A} \quad (1)$$

$$U_1 = U_2 = R_{\text{äq}} \cdot I_1 = 10\text{V}$$

$$I_3 = \frac{U_1}{R_1} = \frac{10\text{V}}{6\Omega} = 1,667\text{A} \quad (1)$$

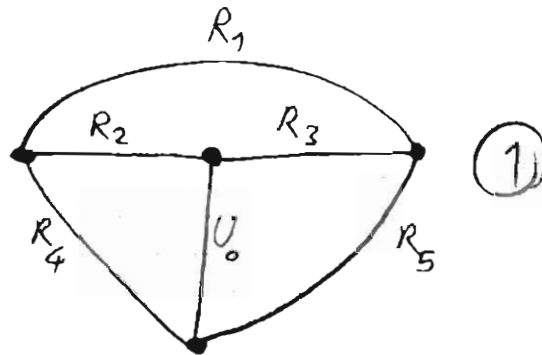
$$I_4 = \frac{U_2}{R_3} = \frac{10\text{V}}{12\Omega} = 0,8333\text{A} \quad (1)$$

$$I_2 = I_3 - I_4 = 0,8333\text{A} \text{ oder } 0,83\text{A} \quad (1)$$

Aufgabe 1: Fortsetzung

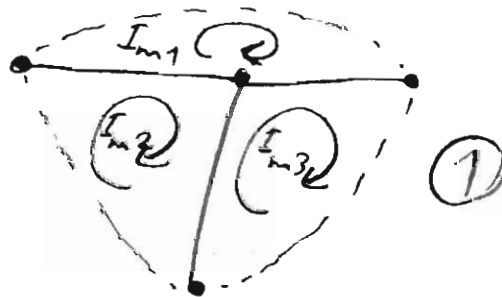
b)

Der Graph:

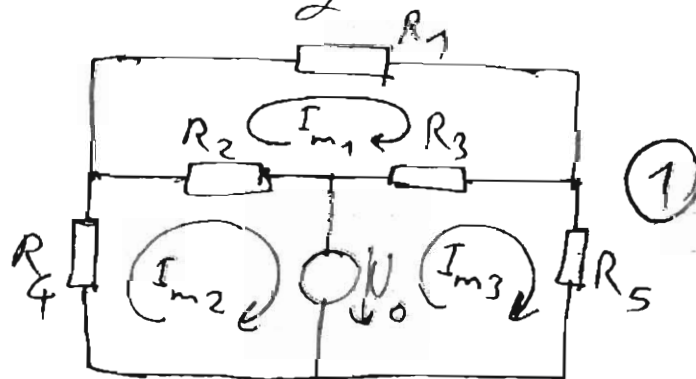


Für den Baum: R_1 , R_4 und R_5 sind kein Teil vom Baum.

Der Baum:



Die Richtung der Masche ist beliebig.
Auf der Schaltung:



Aufgabe 1 Fortsetzung

$$\begin{aligned} \text{c) } I_0 &= I_{m3} - I_{m2} \quad (0,5) & I_4 &= -I_{m2} \quad (0,5) \\ I_1 &= I_{m1} \quad (0,5) & I_5 &= I_{m3} \quad (0,5) \\ I_2 &= I_{m1} - I_{m2} \quad (0,5) \\ I_3 &= I_{m3} - I_{m1} \quad (0,5) \end{aligned}$$

Der Betrag vom Zweigstrom ist gleich wie ein Maschenstrom wenn der Zweig ein Verbindungszweig ist (nicht zum Baum gehört) (1)

d)

$$\text{MR1: } R_1 I_1 - R_3 I_3 + R_2 I_2 = 0 \Rightarrow \quad (0,5)$$

$$R_1 I_{m1} - R_3 (I_{m3} - I_{m1}) + R_2 (I_{m1} - I_{m2}) = 0 \Rightarrow$$

$$(R_1 + R_3 + R_2) I_{m1} - R_2 I_{m2} - R_3 I_{m3} = 0 \quad (\text{I}) \quad (1)$$

$$\text{MR2: } U_0 - R_4 I_4 - R_2 I_2 = 0 \Rightarrow \quad (0,5)$$

$$U_0 - R_4 (-I_{m2}) - R_2 (I_{m1} - I_{m2}) = 0 \Rightarrow$$

$$-R_2 I_{m1} + (R_2 + R_4) I_{m2} = -U_0 \quad (\text{II}) \quad (1)$$

$$\text{MR3: } -U_0 + R_3 I_3 + R_5 I_5 = 0 \Rightarrow \quad (0,5)$$

$$-U_0 + R_3 (I_{m3} - I_{m1}) + R_5 I_{m3} = 0 \Rightarrow$$

$$-R_3 I_{m1} + (R_3 + R_5) I_{m3} = U_0 \quad (\text{III}) \quad (1)$$

Aufgabe 1 Fortsetzung

Das Gleichungssystem:

Die Punkte schon
✓ vergeben

$$\begin{cases} (R_1 + R_2 + R_3) I_{m1} - R_2 I_{m2} - R_3 I_{m3} = 0 & \text{(I)} \\ -R_2 I_{m1} + (R_2 + R_4) I_{m2} = -U_0 & \text{(II)} \\ -R_3 I_{m1} + (R_3 + R_5) I_{m3} = U_0 & \text{(III)} \end{cases}$$

e) Die Lösung des Gleichungssystems kann sowohl durch Eliminationsverfahren als auch durch Cramer-Regel gefunden werden.

Die Lösung durch Cramer-Regel:

$$D = \begin{vmatrix} R_1 + R_2 + R_3 & -R_2 & -R_3 \\ -R_2 & R_2 + R_4 & 0 \\ -R_3 & 0 & R_3 + R_5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 27\Omega & -7\Omega & -11\Omega \\ -7\Omega & 12\Omega & 0 \\ -11\Omega & 0 & 24\Omega \end{vmatrix}$$

$$-(-7\Omega) ((-7\Omega) \cdot (24\Omega)) + 12\Omega [(27\Omega) \cdot (24\Omega) - 121\Omega^2] =$$
$$-1176\Omega^3 + 6324\Omega^3 = 5148\Omega^3$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 0 & -7\Omega & -11\Omega \\ -100V & 12\Omega & 0 \\ 100V & 0 & 24\Omega \end{vmatrix} = -(-100V)(-7\Omega \cdot 24\Omega) +$$
$$(12\Omega)(1100V\Omega) =$$

$$-16800V\Omega^2 + 13200V\Omega^2 = -3600V\Omega^2$$

Aufgabe 1 Fortsetzung

$$D_2 = \begin{vmatrix} 27\Omega & 0 & -11\Omega \\ -7\Omega & -100V & 0 \\ \textcircled{1} \nearrow -11\Omega & 100V & 24\Omega \end{vmatrix} = -(-7\Omega)(1100\Omega V) - 100V(27\Omega \cdot 24\Omega - 121\Omega^2)$$

$$= 7700\Omega^2 V - 52700\Omega^2 V = -45000\Omega^2 V$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 27\Omega & -7\Omega & 0 \\ -7\Omega & 12\Omega & -100V \\ \textcircled{1} \nearrow -11\Omega & 0 & 100V \end{vmatrix} = -(-7\Omega)(-700\Omega V - 1100\Omega V) + 12\Omega(2700\Omega V) =$$

$$-4900\Omega^2 V + 32400\Omega^2 V - 7700\Omega^2 V = 19800\Omega^2 V$$

$$I_{m1} = \frac{D_1}{D} = \frac{-3600\Omega^2 V}{5148\Omega^3} = -0,70 A \quad \textcircled{0,5}$$

$$I_{m2} = \frac{D_2}{D} = -\frac{45000\Omega^2 V}{5148\Omega^3} = -8,74 A \quad \textcircled{0,5}$$

$$I_{m3} = \frac{D_3}{D} = \frac{19800\Omega^2 V}{5148\Omega^3} = 3,85 A \quad \textcircled{0,5}$$

Zweigströme:

$$I_0 = I_{m3} - I_{m2} = 3,85 A + 8,74 A = 12,59 A \quad \textcircled{0,5}$$

$$I_1 = I_{m1} = -0,70 A \quad \textcircled{0,5}$$

$$I_2 = I_{m1} - I_{m2} = -0,70 A + 8,74 A = 8,04 A \quad \textcircled{0,5}$$

$$I_3 = I_{m3} - I_{m1} = 3,85 A + 0,70 A = 4,55 A \quad \textcircled{0,5}$$

Aufgabe 2:

$$a) \underline{z}_i = R + j\omega L + \frac{R \cdot \frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = R + j\omega L + \frac{R}{1 + j\omega RC}$$

$$\underline{z}_i = R + j\omega L + \frac{R}{1 + \omega^2 R^2 C^2} - j \frac{\omega RC}{1 + \omega^2 R^2 C^2}$$

$$\underline{z}_i = \frac{2R + \omega^2 R^3 C^2}{1 + \omega^2 R^2 C^2} + j\omega \left(\frac{L - RC + \omega^2 R^2 LC^2}{1 + \omega^2 R^2 C^2} \right) \quad (2)$$

$$b) \operatorname{Im}\{\underline{z}_i\} \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow \omega_n = 0 \quad (\text{da } \omega = \dots) \quad (1)$$

$$\frac{L - RC + \omega^2 R^2 LC^2}{1 + \omega^2 R^2 C^2} \stackrel{!}{=} 0 \quad (\text{nur Zähler betrachten!})$$

$$L - RC + \omega^2 R^2 LC^2 = 0$$

$$\Rightarrow \omega^2 R^2 LC^2 = RC - L$$

$$\Rightarrow \omega^2 = \frac{RC - L}{R^2 LC^2}$$

$$\Rightarrow \omega = \pm \sqrt{\frac{RC - L}{R^2 LC^2}} \quad (\text{nur positive Frequenz gefragt})$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{RC - L}{R^2 LC^2}} \quad (2)$$

$$c) \underline{z}_i(\omega=0) = \frac{2R}{1} = 2R \quad (1)$$

$$\underline{z}_i(\omega=\omega_2) = \frac{2R + \frac{RC-L}{R^2 LC^2} \cdot R^3 C^2}{1 + \frac{RC-L}{R^2 LC^2} \cdot R^2 C^2} = \frac{2R + \frac{RC-L}{L}}{1 + \frac{RC-L}{L}} = \frac{2RL + RC - LR}{L + RC - L} =$$

$$\underline{z}_i(\omega=\omega_2) = \frac{RC+L}{RC} = R + \frac{L}{RC} \quad (2)$$

$$d) \underline{u}_L = \frac{R_L}{\underline{z}_i + R_L} \cdot \underline{u} \quad \underline{I}_L = \frac{\underline{u}_L}{R_L} = \frac{1}{\underline{z}_i + R_L} \cdot \underline{u} \quad \underline{I}_L^* = \frac{1}{\underline{z}_i^* + R_L} \cdot \underline{u}^*$$

$$P_{w,L} = \operatorname{Re}\{P_L\} = \operatorname{Re}\left\{ \frac{1}{2} \underline{u}_L \cdot \underline{I}_L^* \right\} = \operatorname{Re}\left\{ \frac{1}{2} \frac{R_L}{\underline{z}_i + R_L} \underline{u} \cdot \frac{1}{\underline{z}_i^* + R_L} \underline{u}^* \right\}$$

$$P_{w,L} = \operatorname{Re}\left\{ \frac{1}{2} \frac{R_L}{|\underline{z}_i + R_L|^2} |\underline{u}|^2 \right\} = \frac{1}{2} \frac{R_L}{|\underline{z}_i + R_L|^2} \hat{u} \quad (2)$$

$$P_{w,L} = \frac{1}{2} \frac{R_L}{\left| \frac{RC-L}{RC} + R_L \right|^2} \hat{u} = \frac{R_L}{2} \left| \frac{1}{\frac{RC-L}{RC} + R_L} \right|^2 \hat{u} = \frac{R_L}{2} \left(\frac{RC}{RC-L + RR_L C} \right)^2 \hat{u} \quad (2)$$

Aufgabe 3:

i) $\frac{P_i}{P_g} \leq 0,25$

$$P_i = U_i \cdot I$$

$$I = \frac{U_0}{R_i + R_L}$$

$$U_i = \frac{R_i}{R_i + R_L} U_0$$

$$P_i = \frac{R_i}{(R_i + R_L)^2} U_0^2 \quad (1)$$

$$P_g = U_0 \cdot I = \frac{1}{R_i + R_L} U_0^2$$

$$\frac{P_i}{P_g} = \frac{R_i}{(R_i + R_L)^2} U_0^2 \cdot (R_i + R_L) U_0^{-2} = \frac{R_i}{R_i + R_L} \quad (1)$$

$$\Rightarrow \frac{R_i}{R_i + R_L} \leq 0,25$$

$$\Rightarrow R_i \leq 0,25 R_i + 0,25 R_L$$

$$\Rightarrow 0,75 R_i \leq 0,25 R_L$$

$$\Rightarrow R_i \leq \frac{1}{3} R_L \quad \text{Da } R_L \text{ zwischen } 25\Omega \text{ und } 50\Omega \text{ liegen kann, muss}$$

der kleinste Wert genommen werden!

$$\Rightarrow R_i \leq \frac{1}{3} \cdot 25\Omega \Rightarrow R_i \leq 8,33\Omega \quad (2)$$

ii) $U_L \leq 4,5V$ $U_L = \frac{R_L}{R_i + R_L} U_0$

$$\Rightarrow \frac{R_L}{R_i + R_L} U_0 \leq 4,5V$$

$$\Rightarrow R_L \cdot 5V \leq 4,5V \cdot R_i + 4,5V \cdot R_L$$

$$\Rightarrow 0,5V \cdot R_L \leq 4,5V \cdot R_i$$

$$\Rightarrow R_i \geq \frac{1}{9} R_L \quad \text{Da } R_L \text{ bis } 50\Omega \text{ groß sein darf muss der größte}$$

Wert genommen werden!

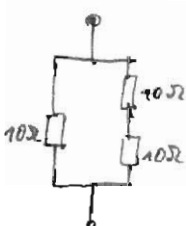
$$\Rightarrow R_i \geq \frac{1}{9} \cdot 50\Omega \Rightarrow R_i \geq 5,55\Omega \quad (2)$$

Widerstandsnetzwerk:

• 10Ω sind zu groß \Rightarrow Parallelschaltung

• $10\Omega \parallel 10\Omega = 5\Omega$ ist zu klein \Rightarrow Eine "Seite" durch Reihenschaltung von 2 10Ω Widerständen ersetzen

• $10\Omega \parallel 20\Omega = 6,67\Omega$ $\checkmark \leftarrow (3)$ (geschrieben oder gezeichnet)



$$I_{\text{Leertlauf}} = \frac{U_0}{R_i} = \frac{5V}{6,67\Omega} = 0,75A \quad (1)$$

