Probeklausur
Grundlagen der Elektrotechnik I

Winter-Semester 2012/2013

1. Diese Probeklausur umfasst 3 Aufgaben:

   Aufgabe 1: teils knifflig, teils rechenlastig. Wissensfragen. ca. 25% der Punkte.

   Aufgabe 2: sehr rechenlastig. ca. 40% der Punkte.

   Aufgabe 3: teils knifflig, teils rechenlastig. Wissensfragen. ca.35% der Punkte.
2. Alle Ergebnisse sind grundsätzlich in den gegebenen Größen auszudrücken.
3. ——— bedeutet: Die folgende Teilaufgabe kann unabhängig von den vorhergehenden Teilaufgaben gelöst werden.
4. erwartete Bearbeitungszeit: ca. 120 min

Viel Erfolg! ☺

ermöglicht durch:
UULM PRO MINT & MED

Aufgabe 1

Gegeben sei folgende Schaltung:

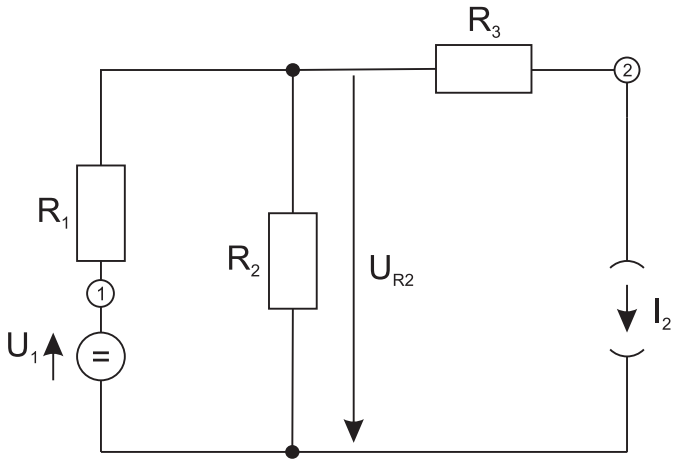


Abbildung 1

Es sei $U_1 = 10\text{V}$, $I_2 = 100\text{mA}$, $R_1 = 10\,\Omega$, $R_2 = 100\,\Omega$ und $R_3 = 200\,\Omega$.

a) Welchen Einfluss hat der Widerstand R_3 auf den Rest der Schaltung?

---

b) Es soll die über R_2 abfallende Spannung U_{R_2} berechnet werden. Geben Sie zwei dafür geeignete Methoden an. Benutzen Sie eine davon, um U_{R_2} auszurechnen.

Stellen Sie sich nun vor, die Punkte (1) und (2) seien über einen Widerstand $R_4 = 200\,\Omega$ verbunden. Die so entstehende Schaltung lässt sich in die in Abbildung 2 gezeigte Schaltung transformieren.

c) Erklären Sie, wie man bei dieser Transformation schrittweise vorgeht (zeichnen Sie Schaltungen). Bestimmen Sie I_α, I_β, R_α und R_β.

---

d) Wo findet sich die Spannung U_{R_2} in der transformierten Schaltung wieder? Berechnen Sie diese Spannung mit Hilfe der Knotenpotentialanalyse. (*Hinweis*: Nehmen Sie an, dass der unterste Knoten auf $\varphi = 0$ liegt.)

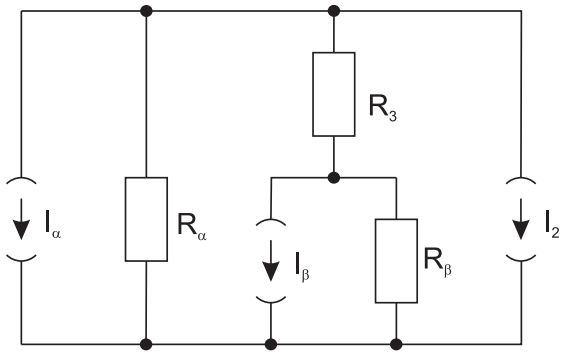


Abbildung 2

Nun wird in Abbildung 2 der Widerstand R_3 durch eine Diode mit Durchlassrichtung nach oben ersetzt.

e) Vereinfachen Sie die Schaltung erneut so, dass Sie sämtliche Stromquellen durch eine einzige Ersatzspannungsquelle ersetzen. Bestimmen Sie dann mit Hilfe der Diodenkennlinie in Abbildung 3 den Diodenstrom graphisch.

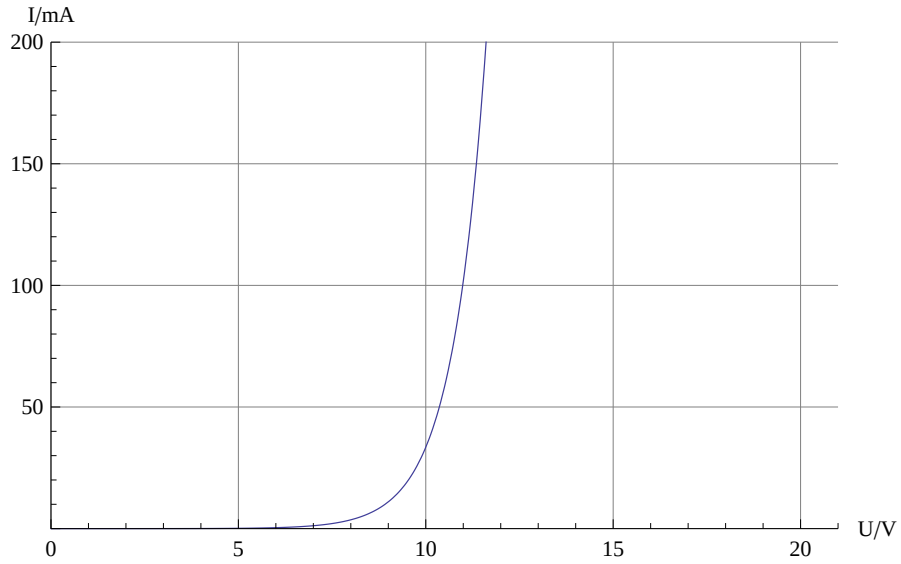


Abbildung 3

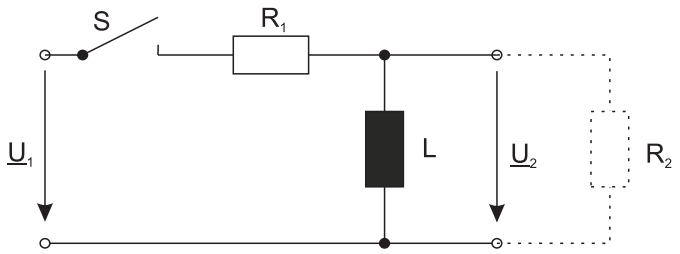


Abbildung 4

Aufgabe 2

Gegeben sei die in Abbildung 4 gezeigte Schaltung. Der Ausgang ($\underline{U}_2$) sei zunächst unbelastet. Am Eingang liege eine sinusförmige Wechselspannung $U_1(t) = \hat{U}_1 \cos(\omega t + \varphi)$ an.

a) Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion $G = \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1}$ bei geschlossenem Schalter S als Funktion von R, L und ω. Geben Betrag und Phase an.

b) Skizzieren Sie das Bode-Diagramm für $R = 1\,\mathrm{k\Omega}$ und $L = 200\,\mathrm{mH}$. Welche Funktion hat die Schaltung? Wo liegt die 3dB-Grenzfrequenz?

Der Ausgang werde im folgenden mit einem Widerstand R_2 belastet. Der Schalter S sei zunächst weiter geschlossen (kein Einschwingvorgang).

c) Geben Sie den komplexen Gesamtwiderstand der Schaltung an. Stellen Sie das Ergebnis ohne Doppelbrüche dar.

d) Berechnen Sie die Leistung P_2, die an R_2 verbraucht wird.

e) Berechnen Sie die Leistung P_R, die im Rest der Schaltung verbraucht wird.

f) Was ergibt sich für das Verhältnis $\frac{P_2}{P_R}$? Wie verhält es sich für $\omega \to 0$ und $\omega \to \infty$?

Im folgenden soll nun der Einschaltvorgang der mit R_2 belasteten Schaltung untersucht werden. Nehmen Sie dazu an, dass der Schalter erst lange Zeit geöffnet war, und dann zum Zeitpunkt $t = 0$ geschlossen wird. Zu diesem Zeitpunkt soll die Spannung $U_1(t)$ auf ihrem Maximalwert sein (d.h. $\varphi = 0$).

g) Stellen Sie die Differentialgleichung für den Spulenstrom $I_L(t)$ auf. Wie lauten die Anfangsbedingungen?

h) Lösen Sie die Differentialgleichung unter den gegebenen Anfangsbedingungen. Verwenden Sie als partikuläre Lösung den eingeschwungenen Zustand.

i) Skizzieren Sie qualitativ den zeitlichen Verlauf von $I_L(t)$ für $t \geq 0$. Tragen Sie zum Vergleich auch die Lösung für $I_L(t)$ im eingeschwungenen Zustand ein. Verwenden Sie als Beispielwerte $R_1 = R_2 = 1\,\mathrm{k\Omega}$, $\omega = 1\,\mathrm{kHz}$, $L = 200\,\mathrm{mH}$, und $\hat{U}_1 = 100\,\mathrm{V}$.

Aufgabe 3

Betrachten Sie zunächst folgende Schaltungen:

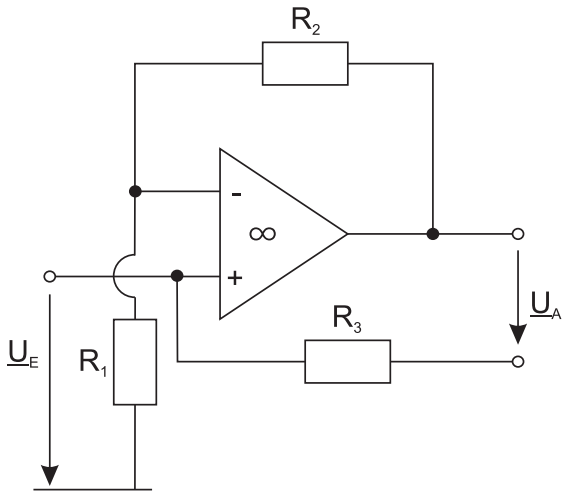


Abbildung 5

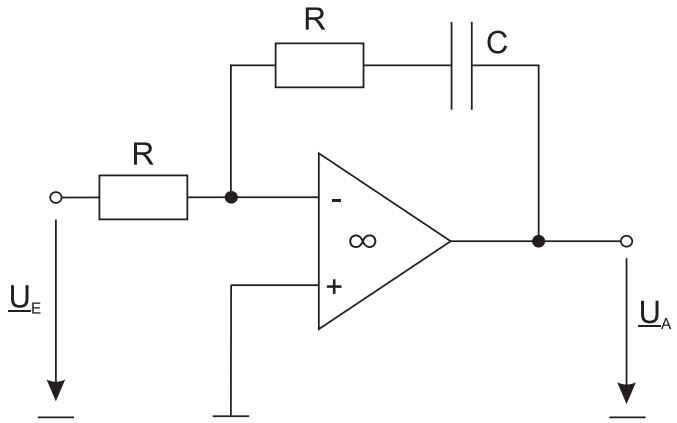


Abbildung 6

Die Operationsverstärker in Abbildungen 5 und 6 seien ideal und ihre Verstärkung unbegrenzt.

a) Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion $G = \frac{\underline{U}_A}{\underline{U}_E}$ der Schaltung aus Abbildung 5. Welchen Einfluss hat der Widerstand R_3?

---

b) Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion $G = \frac{\underline{U}_A}{\underline{U}_E}$ der Schaltung aus Abbildung 6. Geben Sie die 3dB-Grenzfrequenz an und skizzieren Sie das Bode-Diagramm.

---

c) Diskutieren Sie, was mit den Ausgangsspannungen passiert, wenn die Ausgänge in den obigen Schaltungen belastet werden. Nehmen Sie dabei an, dass die Spannungsquellen am Eingang ideal sind.

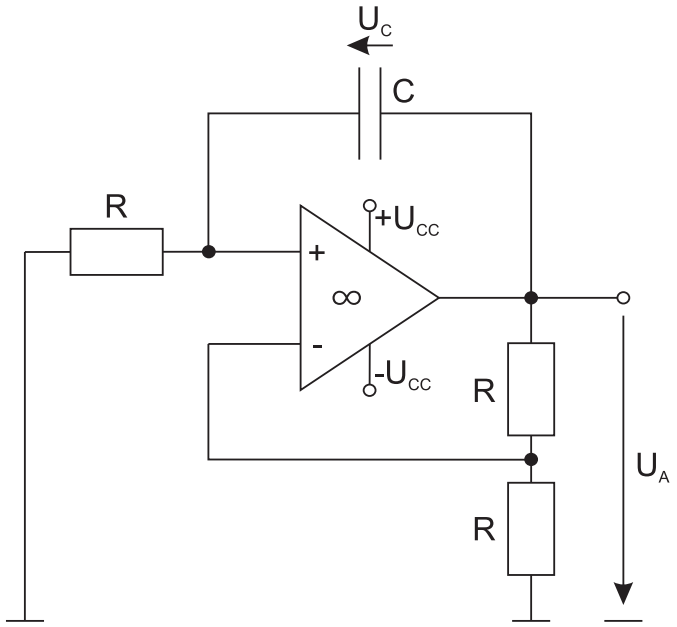


Abbildung 7

Der Operationsverstärker in Abbildung 7 sei wieder ideal, verstärkt aber maximal nur bis zu seiner Versorgungsspannung U_{cc}.

d) Skizzieren Sie den zeitlichen Verlauf der Ausgangsspannung U_A sowie der Spannung am Kondensator U_C.

e) Welche Spannung liegt am Kondensator kurz vor dem Umpolen von U_A ? (Begründung)

f) Formulieren Sie eine Differentialgleichung für den Verlauf der Spannung am Kondensator zwischen zwei Umpolungsvorgängen. Wie ist die Anfangsbedingung?

g) Lösen Sie die Differentialgleichung und benutzen Sie die Lösung, um die Periodendauer des Ausgangssignals $U_A(t)$ zu bestimmen. *Hinweis:* Als partikuläre Lösung können Sie den vollständig geladenen Zustand des Kondensators annehmen, wenn U_A sich nicht umpolen würde.

GET I Probeklausur WS 2012/2013

Aufgabe (1)

a) Da R_3 zu der idealen Stromquelle I_2 in Reihe geschaltet ist, hat R_3 auf den Rest der Schaltung keinen Einfluss. (bis auf die Stromquelle I_2, die mehr Leistung bringen muss)

b) 1. Überlagerungssatz

2. Spannungsquelle in Stromquelle umwandeln + Knotenregel

3. Stromquelle in Spannungsquelle umwandeln + Maschenregel (Spannungsteiler)
(transient Fehler quelle: U_{R_2} vorher $\neq$ U_{R_2} nachher!)

1.: i) Beitrag U_1 => I_2 = Leerlauf

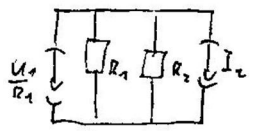
$$\frac{U_{R_2}}{-U_1} = \frac{-R_2}{R_1+R_2} \Rightarrow U_{R_2}^{(i)} = -U_1 \frac{R_2}{R_1+R_2} = -9{,}09\ V$$

ii) Beitrag I_2 => U_1 = Kurzschluss

$$U_{R_2}^{(ii)} = -I_2 \cdot \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1+R_2} = -0{,}909\ V$$

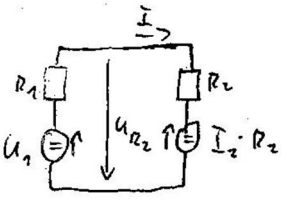
$$U_{R_2}^{(i)} + U_{R_2}^{(ii)} = -10\ V$$

2.)



$$U_{R_2} = -\left(I_2 + \frac{U_1}{R_1}\right) \cdot \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1+R_2} = -10\ V$$

3.)

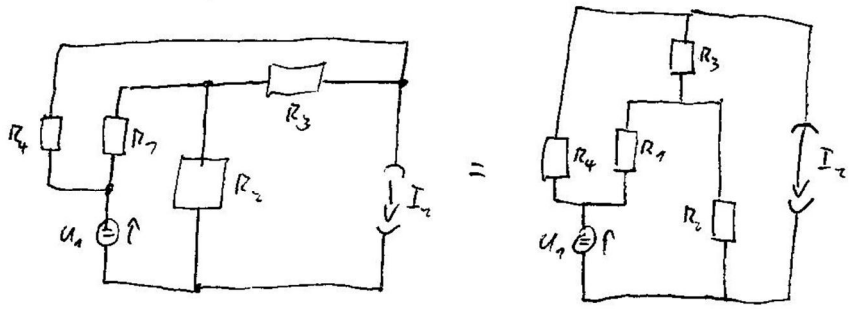


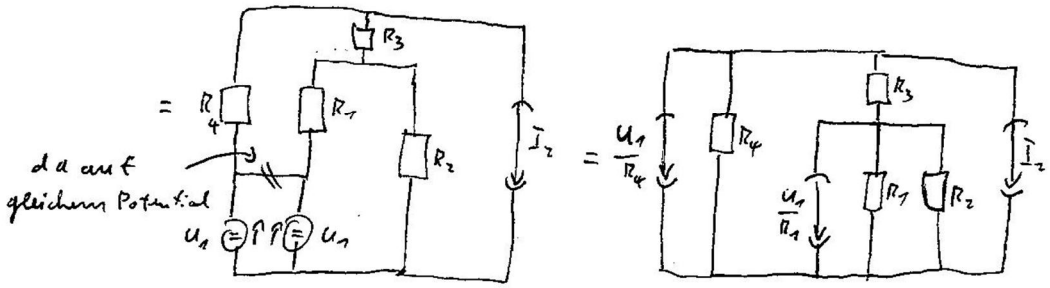
$$U_1 + R_1 \underline{I} + R_2 \underline{I} - I_2 \cdot R_2 = 0$$

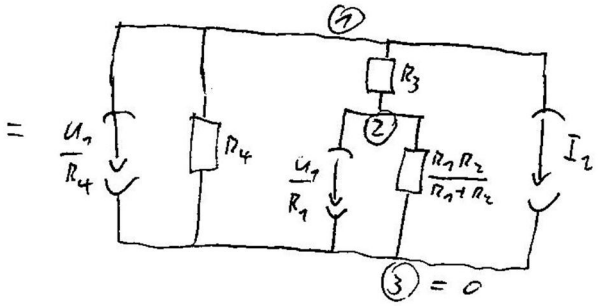
$$U_1 = I_2 \cdot R_2 = 10\ V \Rightarrow \underline{I} = 0\ A$$

$$\Rightarrow U_{R_2} = -U_1 - R_1 \cdot \underline{I} = -10\ V$$

Aufgabe (1) c)







d) U_{R_2} = Spannung, die über R_3 abfällt.

KPA:

① : $(\varphi_1 - \underbrace{\varphi_3}_{0})\, G_4 + (\varphi_1 - \varphi_2)\, G_3 = -\frac{U_1}{R_4} - I_2$

② : $(\varphi_2 - \varphi_1)\, G_3 + (\varphi_2 - \underbrace{\varphi_3}_{0})\, G_2 = -\frac{U_1}{R_1}$

① $\varphi_1 (G_4 + G_3) - \varphi_2 \cdot G_3 = -U_1 \cdot G_4 - I_2$

② $\varphi_2 (G_3 + G_2) - \varphi_1 \cdot G_3 = -U_1 \cdot G_1$

zu ① d) $G_1 = 0{,}1\,\frac{1}{\Omega}$, $G_3 = 0{,}005\,\frac{1}{\Omega}$, $G_4 = 0{,}005\,\frac{1}{\Omega}$, $G_5 = 0{,}11\,\frac{1}{\Omega}$

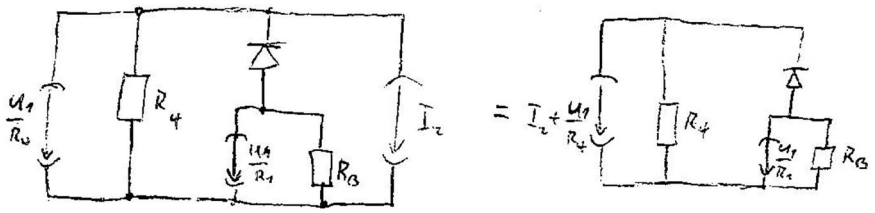
① $0{,}01\,\varphi_{1/V} - 0{,}005\,\varphi_{2/V} = -0{,}75$

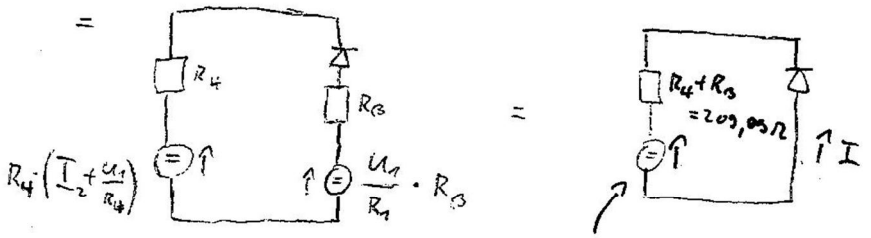
② $0{,}115\,\varphi_{2/V} - 0{,}005\,\varphi_{1/V} = -1$ (alles Einheitenlos)

① + 2·②: $0{,}225\,\varphi_{2/V} = -2{,}75$

$\Rightarrow \varphi_2 = -9{,}\overline{5}\ V = U_{R_2}$

① e)



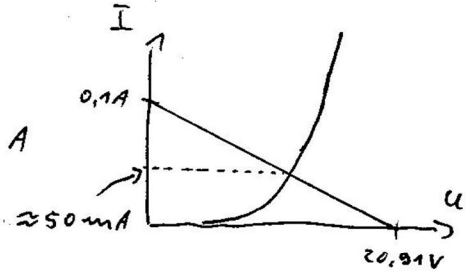


$$-\frac{U_1}{R_1} \cdot R_5 + \left(I_2 + \frac{U_1}{R_4}\right) \cdot R_4 = 20{,}91\,V$$

$\Rightarrow U_{ers} = 20{,}91\,V - I \cdot 209{,}09\,\Omega$

$$\Rightarrow I = \frac{-U_{ers}}{209{,}09\,\Omega} + \frac{20{,}91\,V}{209{,}09\,\Omega}$$

$$= -\frac{1}{209{,}09\,\Omega} \cdot U_{ers} + 0{,}1\,A$$



Aufgabe (2)

a) $$G = \frac{U_2}{U_1} = \frac{j\omega L}{R_1 + j\omega L}$$

$$|G| = \frac{\omega L}{\sqrt{R_1^2 + \omega^2 L^2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{R_1^2}{\omega^2 L^2} + 1}}$$

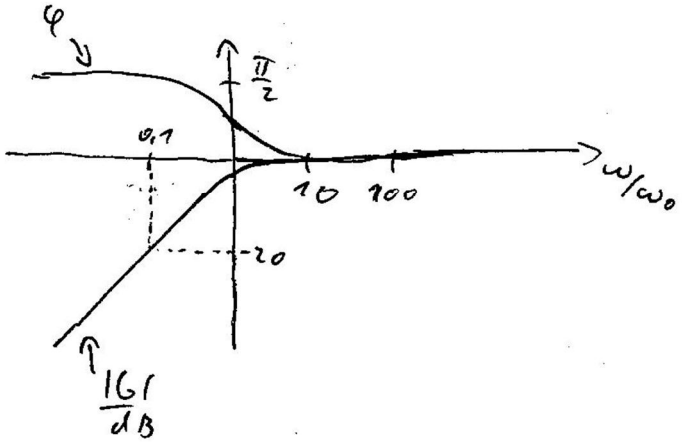
$$\varphi = \arctan\left(\frac{\omega L}{0}\right) - \arctan\left(\frac{\omega L}{R_1}\right)$$

$$= \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{\omega L}{R_1}\right)$$

b) $$\frac{|G|}{dB} = 20 \log\left(\frac{1}{\sqrt{\frac{R_1^2}{\omega^2 L^2} + 1}}\right) = -10 \log\left(1 + \frac{R_1^2}{\omega^2 L^2}\right)$$

$$\frac{|G|}{dB} \xrightarrow{\omega \to 0} -\infty \qquad \varphi \xrightarrow{\omega \to 0} \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{|G|}{dB} \xrightarrow{\omega \to \infty} 0 \qquad \varphi \xrightarrow{\omega \to \infty} 0$$



$$1 + \frac{R_1^2}{\omega_0^2 L^2} = 2$$

$$\Rightarrow \omega_0 = \frac{R_1}{L}$$

(2) c)

$$\underline{Z}_{ges} = R_1 + \frac{j\omega L R_2}{R_2 + j\omega L} = \frac{R_1(j\omega L + R_2) + j\omega L R_2}{R_2 + j\omega L}$$

$$= \frac{R_1 R_2 + j\omega L(R_1 + R_2)}{R_2 + j\omega L}$$

d)

$$P_2 = \frac{1}{2} U_{R_2} \cdot I_{R_2}^* = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{R_2} U_{R_2} \cdot U_{R_2}^* = \frac{1}{2} \frac{|U_{R_2}|^2}{R_2}$$

$$\underline{U}_{R_2} = \underline{U}_1 \frac{R_2 \| L}{\underline{Z}_{ges}} = \underline{U}_1 \frac{\frac{j\omega L R_2}{R_2 + j\omega L}}{\underline{Z}_{ges}} = \underline{U}_1 \frac{j\omega L R_2}{R_1 R_2 + j\omega L(R_1 + R_2)}$$

$$\Rightarrow P_2 = \frac{1}{2} \hat{U}_1^2 \cdot \frac{\omega^2 L^2 R_2}{R_1^2 R_2^2 + \omega^2 L^2 (R_1 + R_2)^2}$$

e)

$$P_R = P_{R_1} + \underbrace{P_L}_{=0} = \frac{1}{2} \frac{|U_{R_1}|^2}{R_1}$$

$$U_{R_1} = U_1 \frac{R_1}{\underline{Z}_{ges}} = U_1 \frac{R_1 R_2 + j\omega L R_1}{R_1 R_2 + j\omega L(R_1 + R_2)}$$

$$\Rightarrow P_R = \frac{1}{2} \hat{U}_1^2 \frac{R_1 R_2^2 + \omega^2 L^2 R_1}{R_1^2 R_2^2 + \omega^2 L^2 (R_1 + R_2)^2}$$

f)

$$\frac{P_2}{P_R} = \frac{\omega^2 L^2 R_2}{R_1 R_2^2 + \omega^2 L^2 R_1} = \frac{R_2}{R_1 \left(1 + \frac{R_2^2}{\omega^2 L^2}\right)}$$

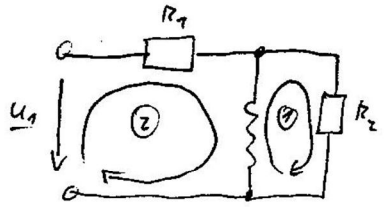
$$\frac{P_2}{P_R} \xrightarrow{\omega \to 0} 0$$

$$\frac{P_2}{P_R} \xrightarrow{\omega \to \infty} \frac{R_2}{R_1}$$

(2) g)

(1) $U_L(t) = L\dot{I}_L(t) = I_{R_2}(t) R_2 = U_{R_2}(t)$

$I_{R_2} = I_{ges} - I_L$



(2) $I_{ges}(t) \cdot R_1 + L\dot{I}_L(t) = U_1(t)$

(1) $\Rightarrow L\dot{I}_L = I_{ges} R_2 - I_L R_2$

$\Rightarrow I_{ges} = \frac{L}{R_2}\dot{I}_L + I_L$

(1) + (2) $\Rightarrow L\frac{R_1}{R_2}\dot{I}_L + I_L R_1 + L\dot{I}_L = U_1$

$\Rightarrow \boxed{L\left(1+\frac{R_1}{R_2}\right)\dot{I}_L + I_L R_1 - U_1 = 0}$

Anfangsbedingung: $I_L(t=0) = 0$

h) hom. DGL: $L\left(1+\frac{R_1}{R_2}\right)\dot{I}_L + I_L R_1 = 0$

Ansatz: $I_L^{(A)}(t) = I_0 e^{-t/\tau}$

einsetzen $\Rightarrow -L\left(1+\frac{R_1}{R_2}\right)\frac{I_0}{\tau} e^{-t/\tau} + R_1 I_0 e^{-t/\tau} = 0$

$\Rightarrow L\left(1+\frac{R_1}{R_2}\right)\frac{1}{\tau} = R_1$

$\Rightarrow \tau = L\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$

part. LSG: eingeschwungener Zustand:

$I_L^{(P)}(t) = \mathrm{Re}\left(\underline{I}_L e^{j\omega t}\right) = |\underline{I}_L| \cos(\omega t + \varphi)$ ← Phase von $\underline{I}_L$

$\underline{I}_L = \frac{\underline{U}_L}{j\omega L}$ (2)d $= \hat{U}_1 \frac{R_2}{R_1 R_2 + j\omega L(R_1+R_2)}$

zu (2) h)

$$\Rightarrow \quad I_L^{(P)}(t) = \hat{U}_1 \frac{R_2}{\sqrt{R_1^2 R_2^2 + \omega^2 L^2 (R_1+R_2)^2}} \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\text{mit} \quad \varphi = -\arctan\left(\frac{\omega L (R_1+R_2)}{R_1 R_2}\right)$$

Gesamt-Lsg: $I_L(t) = I_L^{(H)} + I_L^{(P)}$

$$= I_0 e^{-t/\tau} + \hat{U}_1 \frac{R_2}{\sqrt{R_1^2 R_2^2 + \omega^2 L^2 (R_1+R_2)^2}} \cos(\omega t + \varphi)$$

Anf.-Bed.: $I_L(0) = 0$

$$\Rightarrow I_0 = -\underbrace{\hat{U}_1 \frac{R_2}{\sqrt{R_1^2 R_2^2 + \omega^2 L^2 (R_1+R_2)^2}}}_{\hat{I}_L} \cos(\varphi)$$

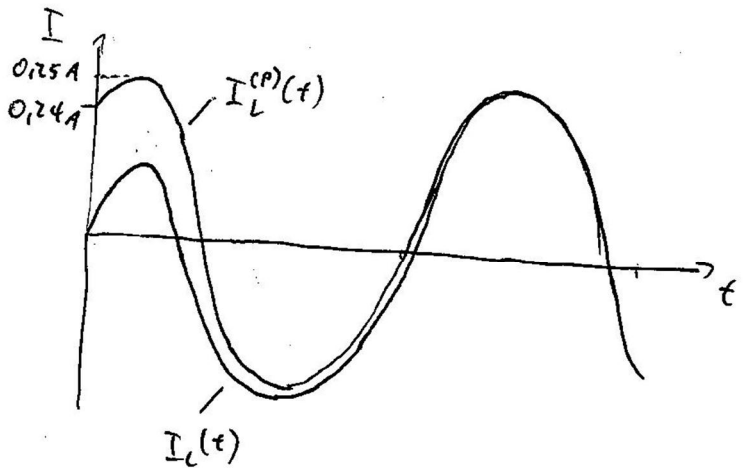
i)

$R_1 = R_2 = 1\,k\Omega$, $\omega = 1\,kHz$, $L = 200\,mH$, $\hat{U}_1 = 100\,V$

$$\Rightarrow \hat{I}_L = 0{,}25\,A$$

$$\varphi = -0{,}38 = -0{,}12\,\pi$$

$$I_0 = 0{,}24\,A$$



Aufgabe (3) a)

$$\underline{U}_A = \underline{I} \cdot R_2$$

$$\underline{U}_E = \underline{I} \cdot R_1$$

$$\Rightarrow \frac{\underline{U}_A}{\underline{U}_E} = \frac{R_2}{R_1}$$

R_3 hat keinen Einfluss, da bei unbelastetem Ausgang kein Strom durch ihn fließt.

b)

$$\underline{U}_A = \underline{I} \cdot \left(R + \frac{1}{j\omega C}\right)$$

$$\underline{U}_E = -\underline{I} \cdot R$$

$$\Rightarrow \frac{\underline{U}_A}{\underline{U}_E} = -\frac{R + \frac{1}{j\omega C}}{R} = -1 - \frac{1}{j\omega CR} = -\frac{1 + j\omega CR}{j\omega CR}$$

$$|G| = \sqrt{1 + \frac{1}{\omega^2 C^2 R^2}}$$

$$\varphi = \arctan\left(-\frac{1}{\omega CR}\right)$$

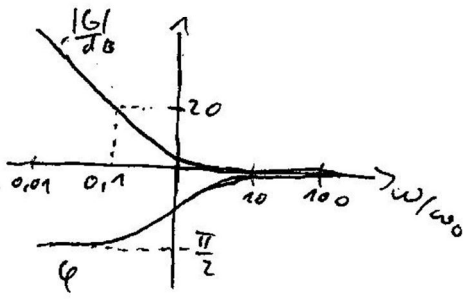
$$\frac{|G|}{dB} = 20 \log\left(\sqrt{1 + \frac{1}{\omega^2 C^2 R^2}}\right)$$

$$= 10 \log\left(1 + \frac{1}{\omega^2 C^2 R^2}\right)$$

$$1 + \frac{1}{\omega_0^2 C^2 R^2} = 2 \quad \Rightarrow \quad \omega_0 = \frac{1}{CR}$$

$$\frac{|G|}{dB} \xrightarrow{\omega \to 0} \infty \qquad \varphi \xrightarrow{\omega \to 0} -\frac{\pi}{2}$$

$$\frac{|G|}{dB} \xrightarrow{\omega \to \infty} 0 \qquad \varphi \xrightarrow{\omega \to \infty} 0$$



(3) c)

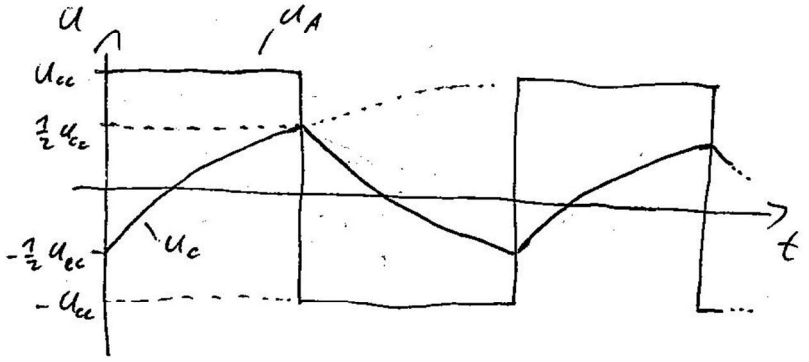
Für die mit R_L belastete Schaltung aus Abb. 5 gilt:

$$\frac{\underline{U}_A(\text{bel.})}{\underline{U}_A(\text{unb.})} = \frac{R_L}{R_L + R_3}$$

$$\Rightarrow \underline{U}_A(\text{bel.}) = \underline{U}_A(\text{unb.}) \cdot \frac{R_L}{R_L + R_3} < \underline{U}_A(\text{unb.})$$

Bei der Schaltung aus Abb. 6 ändert sich $\underline{U}_A$ nicht, da der OV eine ideale Spannungsquelle ist.

d)



e) Wenn die Ausgangsspannung umpolt, müssen die beiden Eingänge des OV auf gleichem Potential sein.
Aufgrund des Spannungsteilers am − Eingang liegt auch der + Eingang auf $\varphi_+ = \frac{1}{2} u_A$. Der Ausgang liegt bei seinem Maximalwert $\pm U_{cc} = \varphi_A$. (*)
Damit gilt: $u_c = \varphi_A - \varphi_+ = \pm \frac{1}{2} U_{cc}$

(*) Da der OV Mitgekoppelt ist, und unendlich verstärkt, wird jede minimale Differenz an den Eingängen auf die maximal mögliche Ausgangsspannung $\pm U_{cc}$ verstärkt.

(3) f) o.B.d.A: $U_A = +U_{cc}$

$$I \cdot R + U_c - U_{cc} = 0$$

$$\Rightarrow \dot{Q} R + U_c - U_{cc} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{CR\dot{U}_c + U_c - U_{cc} = 0}$$

Anf. bed.: $U_c(0) = -\frac{1}{2} U_{cc}$

g) hom. DGL: $CR\dot{U}_c + U_c = 0$

Ansatz: $U_c(t) = U_0 e^{-t/\tau}$

$$\Rightarrow -CR \frac{U_0}{\tau} e^{-t/\tau} + U_0 e^{-t/\tau} = 0$$

$$\Rightarrow -CR \frac{1}{\tau} + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \tau = CR$$

part. Lsg: $U_c(t) = U_{cc}$ (Lsg für $t \to \infty$, wenn U_A konstant bleibt)

$$\Rightarrow U_c(t) = U_{cc} + U_0 e^{-t/\tau}$$

Anf. bed.: $U_c(0) = -\frac{1}{2} U_{cc} \Rightarrow U_{cc} + U_0 = -\frac{1}{2} U_{cc}$

$$\Rightarrow U_0 = -\frac{3}{2} U_{cc}$$

$$\Rightarrow U_c(t) = U_{cc}\left(1 - \frac{3}{2} e^{-t/RC}\right)$$

Periodendauer: $U_c(T) = U_{cc}\left(1 - \frac{3}{2} e^{-T/RC}\right) = \frac{1}{2} U_{cc}$

$$\Rightarrow e^{-T/RC} = \frac{1}{3} \Rightarrow -\frac{T}{RC} = \ln \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow T = RC \ln 3$$