





Entscheidungstheorie Teil 1

Thomas Kämpke

# Inhalt

_	Kompakteinstieg Wahrscheinlichkeitsrechnung	
_	Wahrscheinlichkeitsmaß $P$ auf Grundraum $\Omega$	>
_	Einfaches Lotto	
_	Stochastische Unabhängigkeit	
_	Verknüpfung von stochastisch Unabhängig mit Präferenzrelationen ≻	
_	Würfel von Efron	
_	Stochastische Unabhängigkeit	
_	Bedingte Wahrscheinlichkeit	
_	Rechnen mit bedingten Wahrscheinlichkeiten	
_	Zufallsvariablen	
_	Erwartungswert und Varianz	
_	Entscheidungsbäume	
_	Verteilungsfunktionen	

#### Kompakteinstieg Wahrscheinlichkeitsrechnung (1/2)

Wahrscheinlichkeits-Rechnung oder Wahrscheinlichkeits-Theorie beschreibt Vorgänge mit unsicherem/unvorhersehbarem Ergebnis.

Ergebnis "vollkommen" unvorhersehbar → Würfel, Lotto etc. Ergebnis "teilweise" vorhersehbar → Längenmessung mit Schwankungen

#### Wichtig

Das Kausalitätsprinzip "gleiche Ursache haben gleiche Wirkungen" wird nicht verletzt, aber umgangen.

Es wird nicht nach (letzten) Ursachen gesucht.

Wahrscheinlichkeiten beziehen sich immer auf Ereignisse. Nicht weiter teilbare Ereignisse sind Elementarereignisse.

Beim Würfeln: {2, 4, 6} ist das Ereignis "gerades Ergebnis"

{5} ist ein Elementarereignis

#### Kompakteinstieg Wahrscheinlichkeitsrechnung (2/2)

Ereignisse sind nicht unbedingt numerisch, z.B. Ampelsignal.

Zufall weder gut noch schlecht!!

(← Zentrales Motiv der Entscheidungstheorie; denn oft gibt es kein "richtig oder falsch" oder nur ein "dies bevorzugt gegenüber jenem")

Zufall könnte negativ sein, da Kausalität fehlt. Bei Börsenkursen ist dies aber generell unklar.

# Wahrscheinlichkeitsmaß P auf Grundraum $\Omega$ (1/2)

$$O \le P(E) \le 1$$
 ,  $E \subseteq \Omega$ 

$$P(\Omega) = 1$$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(E_i)$$
 für paarweise disjunkte Ereignisse  $E_i \subseteq \Omega$ 

Der Wert P(E) ist die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses E.

# Wahrscheinlichkeitsmaß P auf Grundraum $\Omega$ (2/2)

Beispiel:

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \\
P(\{1\}) = \frac{1}{6} \\
P(\{2\}) = \frac{1}{12} \qquad P(\{2, 4, 6\}) = P(\{2\}) + P(\{4\}) + P(\{6\}) \\
P(\{3\}) = \frac{1}{12} \qquad = \frac{1}{12} + \frac{1}{6} + \frac{2}{6} = \frac{7}{12} \\
P(\{4\}) = \frac{1}{6} \qquad \text{Wahrscheinlichkeiten können ohne} \\
P(\{5\}) = \frac{1}{6} \qquad \text{Wahrscheinlichkeiten können ohne} \\
P(\{6\}) = \frac{2}{6} \qquad \text{Dies ist aber nicht sinnvoll.}$$

#### **Einfaches Lotto (1/3)**

Nur 1 von 49 Kugeln wird gezogen, alle Kugeln mit derselben Wahrscheinlichkeit  $\Omega = \{1, ..., 49\}$ .

$$P(\{1\}) = P(\{2\}) = \dots = P(\{49\}) = c$$
  
 $1 = P(\{1, \dots, 49\}) = P(\{1\}) + \dots + P(\{49\}) = 49 \cdot c \implies c = \frac{1}{49}$ , d.h.

Wahrscheinlichkeit für Elementarereignis =  $\frac{1}{\text{# Elementare reignisse}}$ 

#### Wahrscheinlichkeit hat mit Zählen zu tun!

Alle Wahrscheinlichkeiten gleich gross: "Prinzip des unzureichenden Grundes"

#### **Einfaches Lotto (2/3)**

Wahrscheinlichkeit für 2 Kugeln, Ziehen ohne zurücklegen.

Reihenfolge spielt keine Rolle, aber Berechnung einfacher bei Berücksichtigung der Reihenfolge.

# der gerordneten Paare = 49.48

in Grundgesamtheit mit *n* Einheiten.

# der ungeordneten Paare = 
$$\frac{49 \cdot 48}{2}$$
 =  $\binom{49}{2}$  für jedes ungeordnete Paar gibt es 2 geordnete Paare

Allgemein:

Es gibt  $\frac{n \cdot (n-1)}{2} = \binom{n}{2} = O(n^2)$  ungeordnete Paare ohne Wiederholung

...

"49 über 6" bei 6 gezogenen Kugeln: 
$$\binom{49}{6} = \frac{49 \cdot ... \cdot 44}{1 \cdot ... \cdot 6} \approx 13.8 \cdot 10^6$$
.

#### **Einfaches Lotto (3/3)**

$$\binom{n}{2}$$
 = # ungeordneter Paare ohne Wiederholung  
= # 2 - elementige Teilmengen von  $\{1, ..., n\}$ 

$$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{1 \cdot \dots \cdot k} = \# k - \text{elementige Teilmengen}$$

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = \text{# aller Teilmengen}$$

$$= 2^n \qquad \text{(ohne Rechnung!)}$$

#### Stochastische Unabhängigkeit (1/3)

Zwei Ereignisse sind unabhängig oder stochastisch unabhängig, wenn  $P(E,F) = P(E) \cdot P(F)$  für Ereignisse E, F.

Wenn E und F jeweils alle Ereignisse durchlaufen, bezeichnet

$$P(E,F) = P_{\text{Prod}}(E,F) = P_{\text{gem}}(E,F) = P_{\text{Verbund}}(E,F)$$

 $P(E,F) = P_{\text{Prod}}(E,F) = P_{\text{gem}}(E,F) = P_{\text{Verbund}}(E,F)$  die gemeinsame Wahrscheinlichkeit oder gemeinsamer Verteilung und

$$P(E) = P_1(E), P(F) = P_2(F)$$

die Randverteilungen oder Marginalverteilungen.

Zweimaliges Würfeln ist stochastisch unabhängig, wenn

$$P(\{(1. \text{Wurf} = i, 2. \text{Wurf} = j)\}) = P(\{1. \text{Wurf} = i\}) \cdot P(\{2. \text{Wurf} = j\})$$
  
=  $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$   $i, j = 1, ..., 6$ .

Es können aber auch Ereignisse  $E \subseteq S \times T$  betrachtet werden. Dann Formulierung  $P(E \cap F) = P(E) \cdot P(F)$ .

Ereignisse unabhängig bei unabhängigem Würfeln?

# Stochastische Unabhängigkeit (2/3)

#### Beispiel:

Zweimaliges Würfeln bei unabhängigen Würfeln

*E*: Summe der Ergebnisse ist 6

F: Im ersten Wurf 5

$$P(E) = P(\{(1,5), (2,4), (3,3), (4,2), (5,1)\})$$

$$= P(\{(1,5)\}) + \dots + P(\{(5,1)\})$$

$$= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{36}$$

$$P(F) = P(\{(5,1)\}) = \frac{1}{6}$$

$$P(E,F) = P(\{(5,1)\}) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

$$P(E,F) = \frac{1}{36} = \frac{6}{216} \neq \frac{5}{216} = P(E) \cdot P(F)$$

Ereignisse *E* und *F* trotz unabhängigem Würfelns abhängig!!

# Stochastische Unabhängigkeit (3/3)

#### Beispiel:

Zweimaliges Würfeln bei unabhängigen Würfeln

*E*: Summe der Ergebnisse ist 7

F: Im ersten Wurf 5

$$P(E) = P(\{(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)\}) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

$$P(F) = \frac{1}{6} \qquad \text{siehe oben}$$

$$P(E,F) = P(\{(5,2)\}) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36} \qquad \text{Diese Ereignisse sunabhängig beim}$$

$$P(E,F) = \frac{1}{36} = P(E) \cdot P(F) \qquad \text{D.h. stochastische hängt nicht nur von hängt ni$$

$$P(E,F) = \frac{1}{36} = P(E) \cdot P(F)$$

Diese Ereignisse sind (stochastisch) unabhängig beim selben Vorgang. D.h. stochastische Unabhängigkeit hängt nicht nur vom Zufallsvorgang oder "Zufallsexperiment" ab, sondern auch von der Fragestellung.

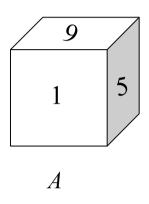
# Verknüpfung von stochastisch Unabhängig mit Präferenzrelationen ≻ (1/1)

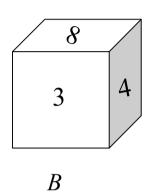
```
A \succ B "A besser als B"
"A wird als besser angesehen als B"
"A wird gegenüber B bevorzugt"
```

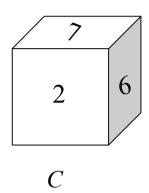
Präferenzrelation ist binär, mit einer Mindestanforderung:

**Transitivität** 

#### Würfel von Efron (1/2)







Gegenseiten haben jeweils dieselbe Zahl.

Jeder Würfel kann grösseres oder kleineres Ergebnis haben als jeder andere! Eine binäre Relation zwischen den Würfeln wird angesetzt zu

Würfel 1≻ Würfel 2

: $\Leftrightarrow P(\text{Augenzahl bei Wurf mit 1} > \text{Augenzahl bei Wurf mit 2}) > \frac{1}{2}$ 

#### Würfel von Efron (2/2)

Dann ist A > B > C > A, denn:

P(Augenzahl von A > Augenzahl von B)

- = P(Augenzahl von B > Augenzahl von C)
- =  $P(\text{Augenzahl von } C > \text{Augenzahl von } A) > \frac{1}{2}$

Würfelergebnisse stochastisch unabhängig ⇒

$$= P((9,8),(9,4),(9,3),(5,4),(5,3))$$

$$= \underbrace{P((9,8))}_{1} + P((9,4)) + P((9,3)) + P((5,4)) + P((5,3)) = \frac{5}{9}$$

 $P(Augenzahl von B > Augenzahl von C) = P((8,7),(8,6),(8,2),(4,2),(3,2)) = \frac{5}{9}$ 

 $P(Augenzahl von C > Augenzahl von A) = P((7,3),(7,1),(6,5),(6,1),(2,1)) = \frac{5}{9}$ 

⇒ Überraschungen bei Transitivität und Wahrscheinlichkeit möglich!

#### **Stochastische Unabhängigkeit (1/2)**

Mehr als zwei Ereignisse  $E_1, ..., E_r$  sind **stochastisch unabhängig**, wenn jede Auswahl dieser Ereignisse die Produktbedingungen

$$P(E_{i_1}, ..., E_{i_r}) = P(E_{i_1}) ... \cdot P(E_{i_r})$$
  $r \le n$ 

erfüllt.

Stochastische Unabhängigkeit ergibt sich nicht aus paarweiser stochastischer Unabhängigkeit.

# Stochastische Unabhängigkeit (2/2)

#### Beispiel:

Behälter mit 4 Kugeln, 1, 2, 3, 4.

Es wird einmal gezogen.

Ereignisse:  $E = \{1, 2\}, F = \{1, 3\}, G = \{1, 4\}$  (keine Elementarereignisse)

$$P(E) = P(F) = P(G) = \frac{1}{2}$$

$$P(EF) = P(\{1\}) = \frac{1}{4}$$

$$P(EG) = P(\{1\}) = \frac{1}{4}$$

$$P(FG) = P(\{1\}) = \frac{1}{4}$$

$$P(EF) = P(E) \cdot P(F)$$
 etc., aber

$$P(EFG) = P(\{1\}) = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{8} = P(E) \cdot P(F) \cdot P(G)$$

#### **Bedingte Wahrscheinlichkeit (1/5)**

Bedingte Wahrscheinlichkeit  $A, B \subseteq S$ 

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$
 für  $P(B) > 0$  Das gemeinsame Eintreten von 2 Ereignissen ist ihr Durchschnitt

#### Grundidee:

Was besagt das bedingende Ereignis *B* über das bedingte Ereignis *A*?

Würfelt  $A = \{5\}$  und  $B = \{2, 4, 6\}$ . Dann ist  $P(A \mid B)$  die Wahrscheinlichkeit dafür, dass 5 fällt unter der Kenntnis, dass gerade Zahl fällt.

$$P(\{5\}|\{2,4,6\}) = \frac{P(\{5\}\cap\{2,4,6\})}{P(\{2,4,6\})} = \frac{P(\emptyset)}{P(\{2,4,6\})} = 0$$

$$P(\{4\}|\{2,4,6\}) = \frac{P(\{4\})}{P(\{2,4,6\})} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{3}{6}} = \frac{1}{3}$$

D.h.  $P(A \mid B) \leq P(A) \leq P(A \mid B)$  möglich.

#### **Bedingte Wahrscheinlichkeit (2/5)**

Was ist bei Gleichheit?

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$
  

$$\Leftrightarrow P(A) \cdot P(B) = P(A \cap B)$$

d.h. die Ereignisse sind unabhängig ⇔ bedingte Wahrscheinlichkeit

= unbedingte Wahrscheinlichkeit

#### Bedingte Wahrscheinlichkeit (3/5)

#### Beispiel:

Ein Arzt besitzt folgende Daten über die Wirksamkeit einer Behandlungsmethode, die bei fast der Hälfte der 21.100 kranken Bewohner einer Region angewendet wurde:

	Stadtbewohner		Landbewohner	
	behandelt	unbehandelt	behandelt	unbehandelt
überlebend	1.000	50	95	5.000
gestorben	9.000	950	5	5.000

Es bedeutet:

 $A = \ddot{u}berlebend$ 

B = behandelt

C = Stadtbewohner

Um zu entscheiden, ob die Behandlungsmethode in Zukunft weiter angewendet werden soll oder nicht, berechnet der Arzt die Wahrscheinlichkeit zu überleben unter der Bedingung, dass behandelt wurde und die Wahrscheinlichkeit zu überleben, unter der Bedingung, dass nicht behandelt wurde.

Es gilt  $P(A \mid B) = 0.1084$  und  $P(A \mid B^C) = 0.4591$ .

Bedeutet dies, dass nicht behandeln besser ist als behandeln?

#### **Bedingte Wahrscheinlichkeit (4/5)**

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1000 + 95}{10000 + 9000 + 95 + 5} = \frac{1095}{10100} = 0,1084$$

$$P(A \mid B^{C}) = \frac{P(A \cap B^{C})}{P(B^{C})} = \frac{50 + 5000}{50 + 950 + 5000 + 5000} = \frac{5050}{11000} = 0,4591$$

Die gesuchten Wahrscheinlichkeiten:

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{1095}{10100} = 0,1084 \quad \text{und} \quad P(A|B^C) = \frac{P(AB^C)}{P(B^C)} = \frac{5050}{11000} = 0,4591$$

$$P(A|BC) = \frac{P(ABC)}{P(BC)} = \frac{1000}{10000} = 0,1$$

$$P(A|BC^C) = \frac{P(ABC^C)}{P(BC^C)} = \frac{50}{1000} = 0,05$$

$$P(A|B^CC) = \frac{P(AB^CC)}{P(B^CC)} = \frac{50}{1000} = 0,05$$

$$P(A|B^CC^C) = \frac{P(AB^CC)}{P(B^CC^C)} = \frac{5000}{10000} = 0,5$$
Stadtbewohner

Für Stadt- und Landbewohner (getrennt) erhöhen sich also die jeweiligen Überlebenswahrscheinlichkeiten durch Behandlung.

#### **Bedingte Wahrscheinlichkeit (5/5)**

Zwei Effekte beeinflussen das Überleben: Behandlung und Wohnort. Es ist

$$P(A \mid BC) = 0.1 < 0.5 = P(A \mid B^{C}C^{C}),$$

d.h. die Wahrscheinlichkeit zu überleben ist für Landbewohner ohne Behandlung viel größer als für Stadtbewohner mit Behandlung! Da aber unter den behandelten Einwohnern relativ viele Stadtbewohner sind

$$(P(C|B) = \frac{P(CB)}{P(B)} = \frac{10.000}{10.100}$$
 nahe bei 1)

unterscheiden sich  $P(A \mid B)$  und  $P(A \mid BC)$  nur kaum.

Der unkontrollierbare Effekt "Wohnort" dominiert den kontrollierbaren Effekt "Behandlung".

⇒ Jeweils Detailbetrachtung erforderlich!

#### Rechnen mit bedingten Wahrscheinlichkeiten (1/2)

$$P(A \mid B) := \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

bedingte Wahrscheinlichkeit auf unbedingte zurückgeführt. Umkehrung evtl. sinnvoll!

Wenn  $\Omega = E_1 \cup ... \cup E_n$  mit  $E_i$  paarweise disjunkt, dann

$$\underline{\underline{P(A)}} = P(A \cap \Omega) = P(A \cap (E_1 \cup ... \cup E_n))$$

$$= P(\underbrace{(A \cap E_1)}_{\subseteq E_1}) \cup ... \cup \underbrace{(A \cap E_n)}_{\subseteq E_n})$$

$$A \cap E_i \quad \text{paarweise disjukt}$$

$$= P(A \cap E_1) + ... + P(A \cap E_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A \cap E_i)$$

$$P(A \mid E_i) = \frac{P(A \cap E_i)}{P(E_i)} \Rightarrow P(A \mid E_i) \cdot P(E_i) = P(A \cap E_i)$$

$$= P(A \mid E_1) \cdot P(E_1) + \dots + P(A \mid E_n) \cdot P(E_n) = \sum_{i=1}^n P(A \mid E_i) \cdot P(E_i)$$

"Formel der totalen Zerlegung"

#### Rechnen mit bedingten Wahrscheinlichkeiten (2/2)

Bayes (Umkehrformel)

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$\Rightarrow \underline{P(A \mid B) \cdot P(B)} = P(B \cap A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} \cdot P(A) = \underline{P(B \mid A) \cdot P(A)}$$

$$P(A \mid B) \cdot \frac{P(B)}{P(A)} = P(B \mid A)$$

$$\Rightarrow \underline{P(E_i \mid A)} = \frac{P(A \mid E_i) \cdot P(E_i)}{P(A)} = \frac{P(A \mid E_i) \cdot P(E_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(A \mid E_j) P(E_j)}$$

totale Zerlegung für A

#### **Zufallsvariablen (1/1)**

#### Idee:

Ergebnisse von zufälligen Vorgängen werden als Werte einer **Funktion** aufgefasst. Funktion heisst **Zufallsvariable**.

#### Gewöhnungsbedürftig ist:

- 1. Eine Funktion wird "Variable" genannt
- 2. Von dieser Funktion werden Werte betrachtet, Argumente werden selten betrachtet und Funktionsvorschriften sind i.a. unbekannt.

#### Beispiel Würfeln:

X ist eine Zufallsvariable mit Werten  $1, 2, \dots, 6$ .

Bei trig. Funktionen  $y = \sin x$  oder Polynomen  $y = x^2 + 7$  ist jeweils Argument und Funktionsvorschrift bekannt, bei Zufallsvariablen ergibt sich der Wert ohne ein erkennbares Argument.

# **Erwartungswert und Varianz (1/1)**

Zufallsvariable X reellwertig. Dann sind

$$E X = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot P(X = x_i)$$

Erwartungswert

Va 
$$X = E(X - EX)^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot P(X = x_i) - (EX)^2$$

Varianz

Würfel:

$$EX = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + \dots + 6 \cdot \frac{1}{6} = 3,5$$

Va 
$$X = 1 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + \dots + 36 \cdot \frac{1}{6} - (3.5)^2 = 2,9167$$

#### Entscheidungsbäume (1/10)

Bäume, bei denen sämtliche Äste aus Aktions- und Ereignisknoten bestehen.

Aktionsknoten = Entscheidungsknoten:



Aktionsknoten mit drei Aktionen; mind eine Aktion.

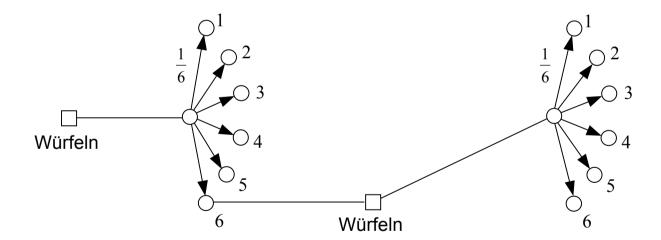


Ereignisknoten mit vier verschiedenen Ereignissen; terminale Knoten sind Ereignisknoten ohne anschließende Ereignisse oder Aktionen.

# Entscheidungsbäume (2/10)

#### Beispiel:

Es wird ein- oder zweimal gewürfelt. Zweiter Wurf nur, wenn im ersten eine 6 gewürfelt wurde.



#### Entscheidungsbäume (3/10)

#### Beispiel:

An oil Wildcatter is considering drilling a well at a specific site. We will assume that:

- 1) If the well is drilled, it will be drilled for a fixed price of \$150.000
- 2) The results of drilling a well will be either:
  - I. finding a major source of oil
  - II. finding a minor source of oil
  - III. finding no oil
- 3) Only one test, a seismic survey may be performed before desiding whether to drill. This experiment costs \$20.000 and indicates for certain if the substructure of the earth is of type I (very favorable to oil), type II (less favorable) or type III (unfavorable).

#### Entscheidungsbäume (4/10)

4) The following probabilities are assigned by the company geologist:

```
P(\text{major source / type I}) = 0.4 P(\text{minor source / type I}) = 0.3 P(\text{major source / type II}) = 0.1 P(\text{minor source / type II}) = 0.4 P(\text{minor source / type III}) = 0.3
```

and

$$P(\text{type I}) = 0.2$$
  $P(\text{type II}) = 0.3$   
 $P(\text{type III}) = 0.5$ 

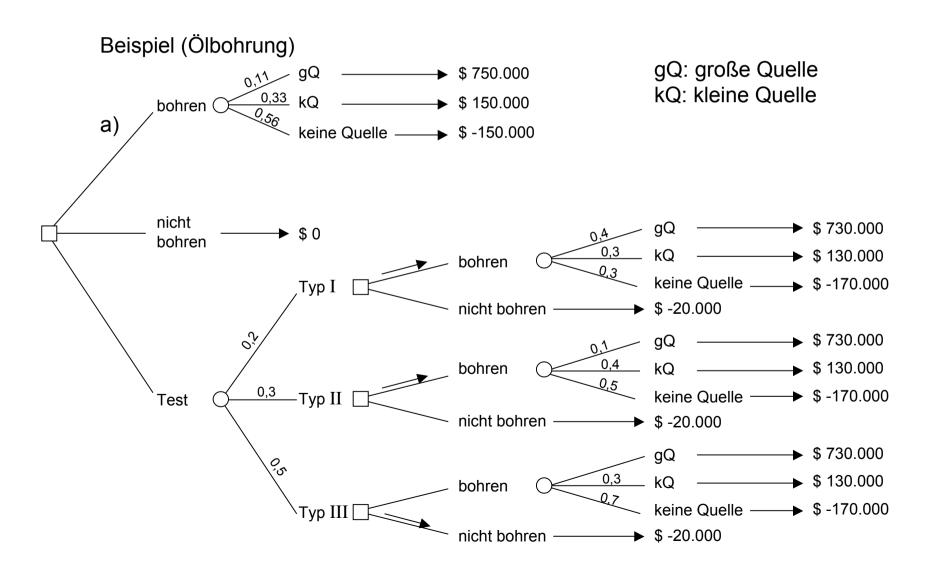
5) If a major source is found, the wildcatter will immediately sell out for \$900.000. If a minor source is found, he will sell for \$300.000.

#### Entscheidungsbäume (5/10)

Assume the decision maker wishes to maximize expected profits and answer the following:

- a) Draw the decision tree for this problem and clearly label all the probabilities and all dollar consequences at the end of the tree.
- b) What is the probability that oil (either a major or minor source) is present at the site?
- c) What is the optimal strategy to follow for this problem?
- d) What is the expected value of the sample imformation (i.e., the seismic survey)?
- e) What is the maximum amount the wildcatter should pay for perfect information?
- f) Calculate P(type I/major source) and P(type II/minor source).

# Entscheidungsbäume (6/10)



#### Entscheidungsbäume (7/10)

Die Wahrscheinlichkeiten im Ast "bohren" ergeben sich (nach der Formel der "totalen Zerlegung") wie folgt: Beispiel

$$Pr(gQ) = Pr(gQ \mid Typ I)^* Pr(Typ I) + Pr(gQ \mid Typ II)^* Pr(Typ II) + Pr(gQ \mid Typ III)^* Pr(Typ III)$$

$$= 0.4 * 0.2 + 0.1 * 0.3 + 0 * 0.5$$

$$= 0.11$$

Weitere Wahrscheinlichkeiten Beispiel

$$Pr(keine Quelle | Typ II) = 1 - Pr(gQ | Typ II) - Pr(kQ | Typ II)$$
 
$$= 1 - 0,1 - 0,4$$
 
$$= 0,5$$

#### Entscheidungsbäume (8/10)

```
b)
                                                  a)
   Pr(OI) = Pr(gQ \text{ oder } kQ) = Pr(gQ) + Pr(kQ) = 0.11 + 0.33 = 0.44
                            Ereignisse
                            disjunkt
c)
    E(\text{"bohren"}) = 0.11 * 750.000 + 0.33 * 150.000 + 0.56 * (-150.000)
                 = 48.000
    E(, nicht bohren) = 0
    E(\text{"Test, dann weiter gemäß} \rightarrow) = 0.2 [0.4 * 730.000 + 0.3 * 130.000 + 0.3 * (-170.000)]
                                     + 0,3 [0,1 * 730.000 + 0,4 * 130.000 + 0,5 * (-170.000)]
                                     + 0,5 * (-20.000)
               dies ist die
               optimale
                                     = 58.000
               Strategie
```

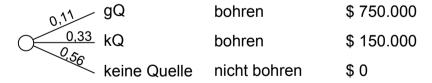
#### Entscheidungsbäume (9/10)

d)

Der Test kostet \$ 20.000, mit ihm kann aber ein erwarteter Gewinn erzielt werden, der nun \$ 10.000 über dem der besten Strategie ohne Test liegt. Somit ist der erwartete Wert des Tests \$ 30.000.

e)

#### Bei vollständiger Information:



erwarteter Gewinn bei vollständiger Information = 0,11 \* 750.000 + 0,33 \* 150.000 + 0,56 \* 0 = 132.000

erwarteter Gewinn ohne Information = 48.000

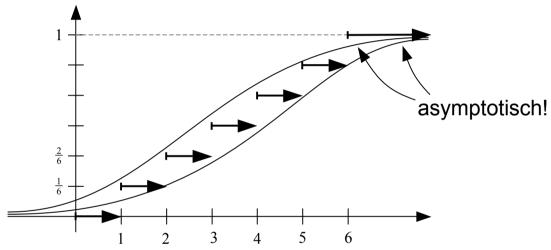
⇒ Wert der vollständigen Information = 132.000 – 48.000 = 84.000

# Entscheidungsbäume (10/10)

f) 
$$Pr(Typ \ I \ | \ gQ) = \frac{Pr(Typ \ I \cap gQ)}{Pr(gQ)} = \frac{Pr(grQ \cap Typ \ I) * Pr(Typ \ I)}{Pr(Typ \ I) Pr(gQ)}$$
 
$$= \frac{Pr(grQ \ | \ Typ \ I) * Pr(Typ \ I)}{Pr(gQ)} = \frac{0.08}{0.011} = \frac{11}{11}$$
 
$$Pr(Typ \ II \ | \ kQ) = \frac{Pr(kQ \ | \ Typ \ II \ ) * Pr(Typ \ II)}{Pr(kQ)} = 0.33 = 11$$

#### **Verteilungsfunktionen (1/4)**

 $F(x) = P(X \le x)$  für beliebige  $x \in \mathbb{R}$  und reellwertige Zufallsvariable



Exponential verteilung hat die "Dichte"  $\lambda$  e<sup>- $\lambda x$ </sup> für  $x \ge 0$ ,  $\lambda > 0$ .

D.h.
$$P(X \le x) = \begin{cases} \int_{0}^{x} \lambda e^{-\lambda y} dy &, x \ge 0 \\ 0 &, x < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} &, x \ge 0 \\ 0 &, x < 0 \end{cases}$$

#### Verteilungsfunktionen (2/4)

Berechnung E 
$$X = \int_{0}^{\infty} x \cdot \lambda e^{-\lambda x} dx$$
  

$$= x \cdot \frac{\lambda}{-\lambda} e^{-\lambda x} \Big|_{0}^{\infty} + \int_{0}^{\infty} e^{-\lambda x} dx$$

$$= -x e^{-\lambda x} \Big|_{0}^{\infty} + \int_{0}^{\infty} e^{-\lambda x} dx$$

$$= 0 + \left[ 1 - \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} \right]_{0}^{\infty}$$

$$= 0 + \left[ 1 - \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} \right]_{0}^{\infty}$$

#### Verteilungsfunktionen (3/4)

Bei Verteilungen mit Dichte darf man nicht bilden

$$P(X \in ... | X = b) = \frac{P(X \in ..., X = b)}{P(X = b)}$$

wegen P(X = b) = 0. Das bedingte Ereignis muss mit positiver Wahrscheinlichkeit eintreten!

Also z.B. 
$$P(X > x + y | X > y) = \frac{P(X > x + y, X > y)}{P(X > y)}$$

$$= \frac{P(X > x + y)}{P(X > y)} = \frac{1 - P(X \le x + y)}{1 - P(X \le y)}$$

$$= \frac{1 - (1 - e^{-\lambda(x + y)})}{1 - (1 - e^{-\lambda y})}$$

$$= \frac{e^{-\lambda x} e^{-\lambda y}}{e^{-\lambda y}} = e^{-\lambda x}$$

$$= 1 - (1 - e^{-\lambda x}) = P(X > x)$$

# **Verteilungsfunktionen (4/4)**

D.h. 
$$P(X > x + y | X > y) = P(X > x)$$

der Exponentialfunktion

- P(X > 2 | X > 0) Mehrere gedächtnislose Verteilungen
  - Kein deterministisches Analogon!

# **Entscheidungstheorie (Video)**

