Entscheidungstheorie
Teil 4

Thomas Kämpke

Inhalt

Zerlegung mehrattributiver Präferenzfunktionen (1/3)

1. Additive Präferenzfunktion

$$v(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} k_i * v_i(x_i), \qquad k_i \geq 0, \qquad \sum_{i=1}^{n} k_i = 1$$

2. Multiplikative Präferenzfunktion

$$v(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} k_i * v_i(x_i) + k * \sum_{i,j=1,\, i>j}^{n} k_i k_j * v_i(x_i) v_j(x_j) + \ldots$$

$$+ k^{n-1} * k_1 * \ldots * k_n v_1(x_1) * \ldots * v_n(x_n), \qquad k > -1$$

3. Multilineare Präferenzfunktion

$$v(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} k_i * v_i(x_i) + \sum_{i,j=1}^{n} \sum_{j>i} k_{i,j} * v_i(x_i) v_j(x_j) + \ldots$$

$$+ k_{1,\ldots,n} * v_1(x_1) * \ldots * v_n(x_n)$$

Zerlegung mehrattributiver Präferenzfunktionen (2/3)

4. Bilaterale Präferenzfunktion

$$v(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} k_i * v_i(x_i) + \sum_{i,j=1}^{n} \sum_{j>i} k_{i,j} * f_i(x_i) f_j(x_j) + \ldots$$

$$+ k_{1,\ldots,n} * f_1(x_1) * \ldots * f_n(x_n), \quad \text{wobei}$$

$$f_i(x_i) = \left(v(x_i, x_{i,C}^*) - v(x_i, x_{i,C,*}) - v(x_{i,*}, x_{i,C}^*)\right) / \left(1 - v(x_i^*, x_{i,C,*}) - v(x_{i,*}, x_{i,C}^*)\right)$$

$x_{i,*}$ schlechteste Alternative in Attribut i

x_i^* beste Alternative in Attribut i

C Komplement, z.B. $(x_i, x_{i,C}^*)$ in Attribut i die Ausprägung x_i, in allen anderen die beste etc.

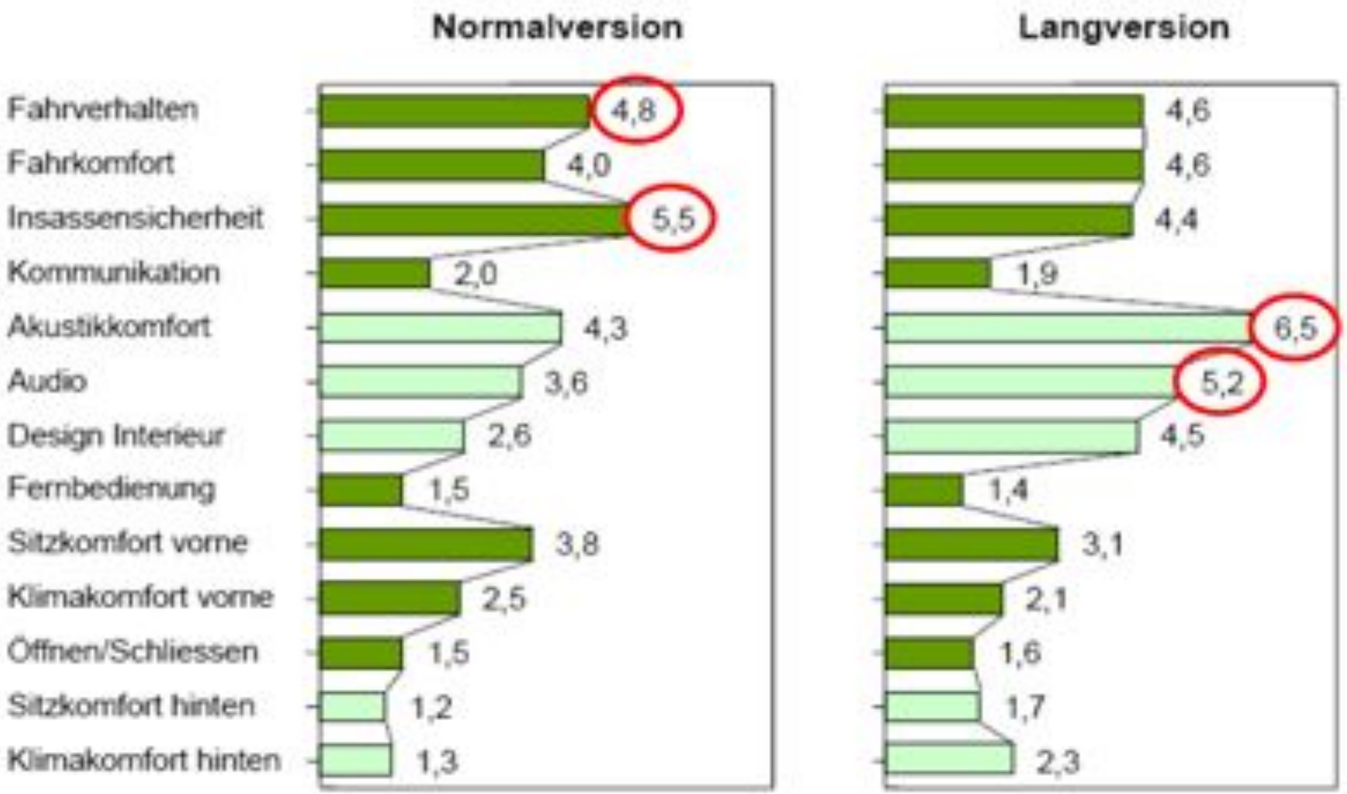
v und alle v_i normiert, d.h.

$v_i(x_{i,*}) = v(x_*) = 0$

$v_i(x_i^*) = v(x^*) = 1.$

Zerlegung mehrattributiver Präferenzfunktionen (3/3)

Beispiel für Kriterien und „Gewichte“ Fahrzeugkonstruktion



Bedeutung der Gewichte (1/3)

$$k_i = v\left(x_{1,*} \ldots x_{i-1,*}\ x_i^*\ x_{i+1,*} \ldots x_{n,*}\right)$$ v additiv, multiplikativ oder multilinear

$$v\left(x_i^*, x_j^*, x_{\{i,j\},C,*}\right) = \begin{cases} k_i + k_j & , v \text{ additiv} \\ k_i + k_j + k * k_i k_j & , v \text{ multiplikativ} \\ k_i + k_j + k_{ij} & , v \text{ multilinear oder bilateral} \end{cases}$$

Zerlegungen und Bedeutung der Gewichte ist für Wert- und Nutzenfunktionen identisch.

„Bilateral“ praktisch ohne Bedeutung

Schwierigkeit

Vorstellung bzw. Bewertung von „extremen“ Alternativen, die in wenigen Attributen bestmöglich und in allen anderen Attributen schlechtestmöglich sind, ist schwierig.

Bedeutung der Gewichte (2/3)

Allgemeinere als additive Präferenzfunktionen werden tatsächliche benötigt:

$(2500, 3, 2) \prec (2000, 2, 2)$ und

$(2000, 2, 1) \prec (2500, 3, 1)$

Festklemmen des 3.Attributs auf Niveau 1 oder 2

$$\left.\begin{array}{l} k_1\, v_1(2500) + k_2\, v_2(3) + k_3\, v_3(2) < \\ k_1\, v_1(2000) + k_2\, v_2(2) + k_3\, v_3(2) \\ \\ k_1\, v_1(2000) + k_2\, v_2(2) + k_3\, v_3(1) < \\ k_1\, v_1(2500) + k_2\, v_2(3) + k_3\, v_3(1) \end{array}\right\}$$

Widerspruch der Ungleichungen wie im Allais-Beispielen!

Bedeutung der Gewichte (3/3)

Die Präferenz ist aber multilinear darstellbar:

$$v_1(2000) = 0 \qquad v_2(2) = 1 \qquad v_3(1) = 0$$
$$v_1(2500) = 1 \qquad v_2(3) = 0 \qquad v_3(2) = 1$$

$$(2500, 3, 2) \prec (2000, 2, 2) \Leftrightarrow k_1 + k_3 + k_{1,3} < k_2 + k_3 + k_{2,3}$$
$$\Leftrightarrow k_1 + k_{1,3} < k_2 + k_{2,3}$$
$$(2000, 2, 1) \prec (2500, 3, 1) \Leftrightarrow k_2 < k_1$$

$$k_1 = \frac{3}{10} \qquad k_{1,2} = 0$$
$$k_2 = \frac{2}{10} \qquad k_{1,3} = \frac{1}{10} \qquad k_{1,2,3} = 0$$
$$k_3 = 0 \qquad k_{2,3} = \frac{4}{10}$$

Zur Bezeichnung „multiplikativ“ (1/1)

$$1 + k * v(x_1 \ldots x_n) = \prod_{i=1}^{n} \left(1 + k\, k_i\, v_i(x_i)\right),$$ sofern v multiplikativ

Man kann beide Seiten der Gleichung als neue Wertfunktion auffassen.

$$v^+(x_1 \ldots x_n) = \prod_{i=1}^{n} \left(1 + k\, k_i\, v_i(x_i)\right)$$

$$\Rightarrow \log v^+(x_1 \ldots x_n) = \sum_{i=1}^{n} \log\left(1 + k\, k_i\, v_i(x_i)\right)$$

$$\underbrace{\frac{\log v^+(x_1 \ldots x_n)}{\log(1+k)}}_{f(x_1 \ldots x_n)} = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\frac{\log(1+k\, k_i)}{\underbrace{\log(1+k)}_{k>-1}}}_{=\lambda_i} * \underbrace{\frac{\log\left(1+k\, k_i\, v_i(x_i)\right)}{\log(1+k\, k_i)}}_{=f_i(x_i)}$$

$$\Rightarrow f(x_1 \ldots x_n) = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\lambda_i}_{\geq 0} f_i(x_i)$$

Falls v nur ordinal bestimmt, so kann man auf multiplikative Zerlegung verzichten!

Im Fall von Unsicherheit ist die multiplikative Nutzenfunktion interessant.
Liegt vor bei wechselseitiger Nutzenunabhängigkeit:

Attribut i präferenzunabhängig $\Leftrightarrow$

$$\left(x^{(1)}, z\right) \prec \left(x^{(2)}, z\right) \Rightarrow \left(x^{(1)}, z'\right) \prec \left(x^{(2)}, z'\right)$$

$\forall\, z, z'$ komplementär und $x^{(1)}, x^{(2)}$ Ausprägungen von Attribut i

Attributmenge I präferenzunabhängig $\Leftrightarrow$

$$\left(x^{(1)}, z\right) \prec \left(x^{(2)}, z\right) \Rightarrow \left(x^{(1)}, z'\right) \prec \left(x^{(2)}, z'\right)$$

$\forall$ Vektoren von Ausprägungen über I, $\forall\, z, z'$ komplementär

Attributmenge wechselseitig präferenzunabhängig $\Leftrightarrow$

alle Attributmengen präferenzabhängig

Wechselseitige Nutzenunabhängigkeit $\Rightarrow$ Nutzenfunktion ist multiplikativ

Wechselseitige Wertunabhängigkeit (det. Fall) $\overset{(n\geq 3)}{\Rightarrow}$ Wertfunktion ist additiv

Herleitung sehr technisch. Umkehrung geben eher „Gefühl“ für die Beziehung zwischen Zerlegungsform und Unabhängigkeit.

z.B. erfüllt eine multiplikative Nutzenfunktion über zwei Attribute die wechselseitige Präferenzunabhängigkeit.

$$\left(x^{(1)}, z\right) \prec \left(x^{(2)}, z\right)$$

$$\Leftrightarrow u\left(x^{(1)}, z\right) < u\left(x^{(2)}, z\right)$$

$$\Leftrightarrow k_1\, u_1\left(x^{(1)}\right) + k_2\, u_2(z) + k\, k_1\, k_2\, u_1\left(x^{(1)}\right) u_2(z)$$

$$< k_1\, u_1\left(x^{(2)}\right) + k_2\, u_2(z) + k\, k_1\, k_2\, u_1\left(x^{(2)}\right) u_2(z)$$

$$\Leftrightarrow k_1\, u_1\left(x^{(1)}\right) * \left(1 + k\, k_2\, u_2(z)\right) < k_1\, u_1\left(x^{(2)}\right) * \left(1 + k\, k_2\, u_2(z)\right)$$

$$\Leftrightarrow k_1\, u_1\left(x^{(1)}\right) < k_1\, u_1\left(x^{(2)}\right)$$

$$\Leftrightarrow \ldots (\text{Rückwärts mit } z') \qquad \Leftrightarrow \left(x^{(1)}, z'\right) \prec \left(x^{(2)}, z'\right)$$

Bestimmung von mehrattributiven Präferenzfunktion (1/1)

1. **Bestimmung eindimensionaler Präferenzfunktionen**

   (det Fall: Mittelpunktsmethode
   prob Fall: Sicherheitsäquivalente)

2. **Aggregation**

   (typischerweise willkürlicher Funktionsansatz, dann Gewichtsbestimmung über externe Alternativen)

Problem (noch mal) „kognitiver overload“

- Bewertung extremer Alternativen schwierig oder
- Entscheider sieht keinen Zusammenhang zwischen extremen und realen Alternativen.