ulm university universität ulm

Entscheidungstheorie
Teil 5

Thomas Kämpke

Inhalt

Bestimmung von multiattributiven Präferenzfunktionen (1/1)

„holistischer Ansatz“

1. Bestimmung der tatsächlichen Präferenzen auf einer Bezugsmenge, d.h. „kleinen“ Menge von realistischen Alternativen.

2. Extrapolation

Präferenzbestimmung durch lineare Optimierung (1/6)

Optimierung ohne Nebenbedingung („frei“)

$$\min f(x) \quad \text{oder} \quad \max f(x) \qquad (\rightarrow \min - f(x))$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$$

Ein **lokales Minimum** liegt allenfalls dort, wo $f'(x) = 0 \quad (n=1)$

bzw. $$grad\ f(x) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} f(x), \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n} f(x) \right) = 0 \qquad (n > 1)$$

Ist lokales Minimum auch **global**?

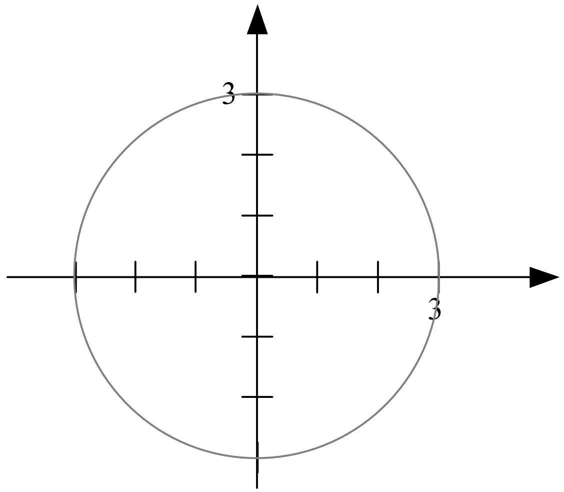
Präferenzbestimmung durch lineare Optimierung (2/6)

Optimierung mit Nebenbedingung

$$\min 8x_1 - 2x_2$$

so dass $x_1^2 + x_2^2 \leq 9$

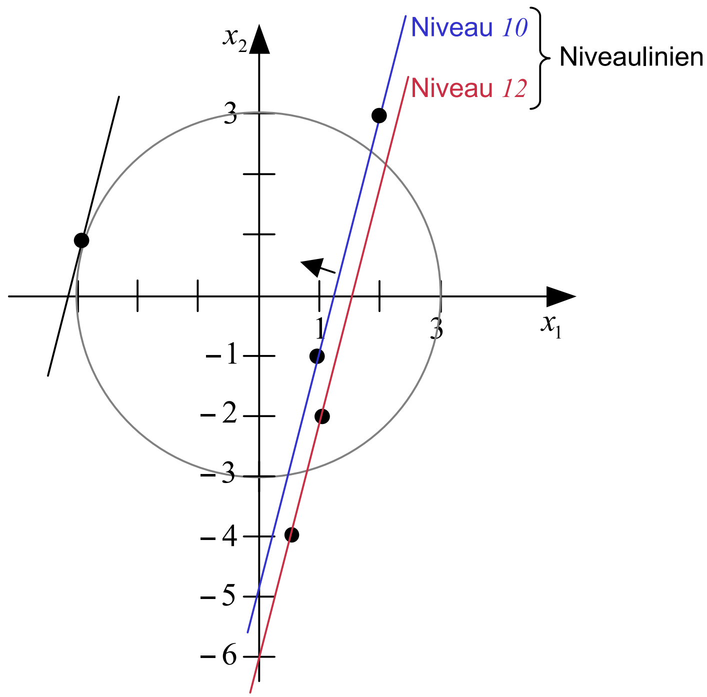
Die „Zielfunktion“ $8x_1 - 2x_2$ wird nicht über ganz $\mathbb{R}^2$, sondern nur über das Kreisinnere minimiert



Präferenzbestimmung durch lineare Optimierung (3/6)

Zielfunktion nimmt z.B. den Wert *10* an („Niveau")

$$8x_1 - 2x_2 = 10 \quad \Leftrightarrow \quad 2x_2 = 8x_1 - 10 \quad \Leftrightarrow \quad x_2 = 4x_1 - 5$$



Lokales Minimum liegt auf dem Rand!

$$8x_1 - 2x_2 = 12 \quad \Leftrightarrow \quad \ldots\ldots \quad x_2 = 4x_1 - 6$$

Präferenzbestimmung durch lineare Optimierung (4/6)

Komplizierteres Problem durch mehrere Nebenbedingungen

$$\min 8x_1 - 2x_2$$

so dass $x_1^2 + x_2^2 \leq 9$

$$(x_1 - 1)^2 + \left(x_1 - \frac{1}{2}\right)^2 \leq 4 \qquad \text{Kreis um } \begin{pmatrix} 1 \\ -0.5 \end{pmatrix} \text{ mit Radius } 2$$

mehrere Nebenbedingungen sind immer als Konjunktion aufzufassen!

Präferenzbestimmung durch lineare Optimierung (5/6)

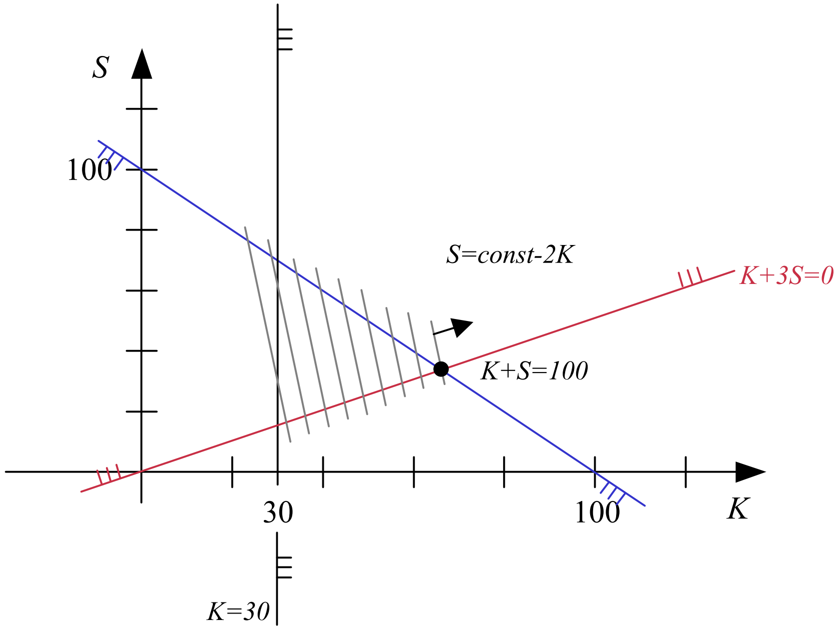
Bei mehreren Nebenbedingungen ist das einfachste Problem linear in Zielfunktion und Nebenbedingung.

Beispiel

$$\max \quad 0.1 * K + 0.05 * S$$

$$\text{so dass (s.d.)} \quad \begin{aligned} K + S &\leq 100 \\ K \quad &\geq 30 \\ K - 3S &\leq 0 \\ K, S &\geq 0 \end{aligned}$$

Präferenzbestimmung durch lineare Optimierung (6/6)



- Maximalwert

Schraffierte Region : umschliesst Zulässigkeitsbereich

Zielfunktion $0.1 * K + 0.05 * S = const$

$$\Leftrightarrow \quad 2K + S = const$$

$$\Leftrightarrow \quad + S = const - 2K$$

Allgemeine Form eines linearen Programms (1/2)

$$\left.\begin{array}{ll} \min c_1x_1 + \ldots + c_nx_n & \\ \text{so dass (s.d.)} & \left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right\} \begin{array}{c}\text{eigentliche}\\ \text{Nebenbedingungen}\end{array} \\ & \underbrace{x_1 \ldots x_n \geq 0}_{\text{VZ Bedingung}} \end{array}\right\} \text{Standardform}$$

Jedes LP kann auf diese Form gebracht werden, z.B. durch Schlupfvariablen

$$3x_1 + 11x_2 + 9x_4 + x_5 \leq 88$$

$$\downarrow$$

$$3x_1 + 11x_2 + 9x_4 - x_5 + s = 88$$

$s \geq 0$ reelle Schlupfvariable.

viele andere „Transformationen“ oder Tricks zur Erzeugung der Standardform.

Allgemeine Form eines linearen Programms (2/2)

Problem nur sinnvoll, wenn Anzahl Variablen > Anzahl Gleichungen also n>m. Ansonsten wäre Lösung eindeutig bestimmt oder das Gleichungssystem überbestimmt (keine Lösung)

L in Optimierung entspielt. Suche in „Unterraum“ bzw. verschobenen Unterraum.

Der **Simplexalgorithmus** löst LP in Standardform

Visualisierung immer mit Vorbehalt, z.B. Problem mit 2 Variablen hat höchstens 1 Gleichung.

Bei 2 Variablen und 3 Ungleichungen ⇝ Transformation auf Problem mit 5 Variablen und 3 Gleichungen

Simplexalgorithmus (1/2)

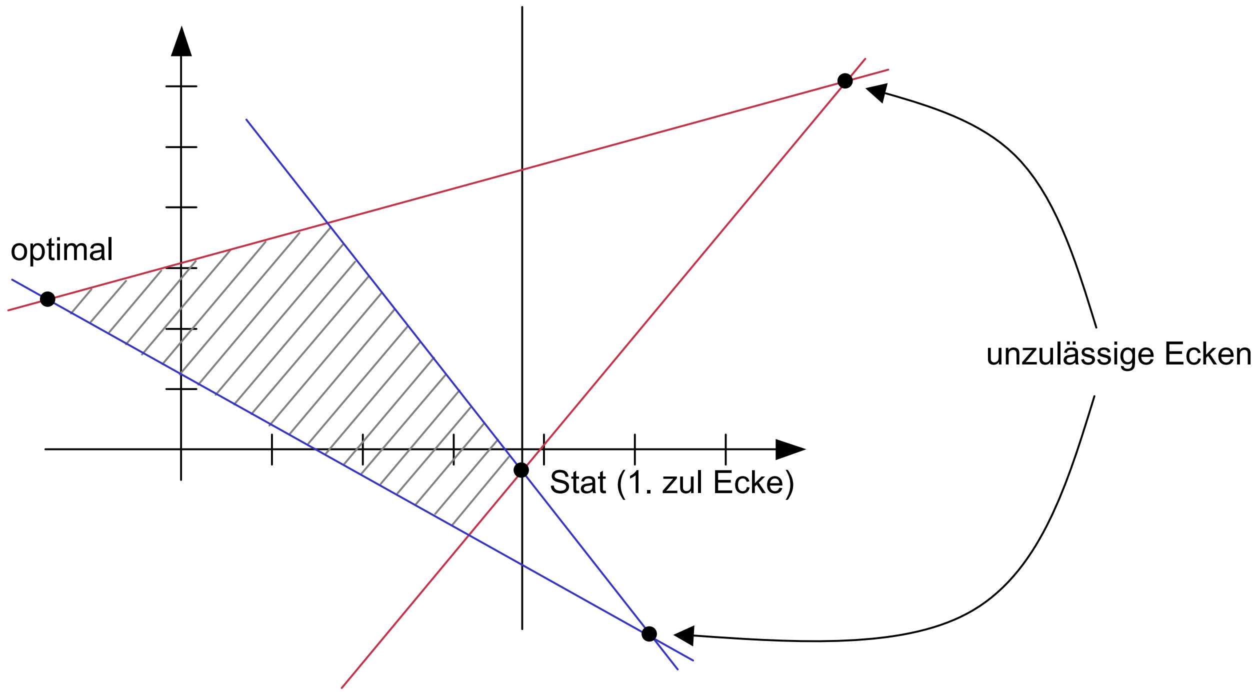
Jede Ecke (Extremalpunkt) des Zulässigkeitsbereichs entspricht – von Sonderfällen abgesehen – einer Auswahl von Spalten der Nebenbedingung. Die Spalten bilden sogar Basis des $\mathbb{R}^m$.

1. Bestimmung einer zulässigen Ecke/Basis

   Ecke gehört zum Zuverlässigkeitsbereich

2. Bestimmung einer optimalen Ecke durch Folge benachbarter, zulässiger Ecken entlang der sich der Zielfunktionswert verbessert.

Simplexalgorithmus (2/2)



Additive Wertfunktion und lineare Programme (1/14)

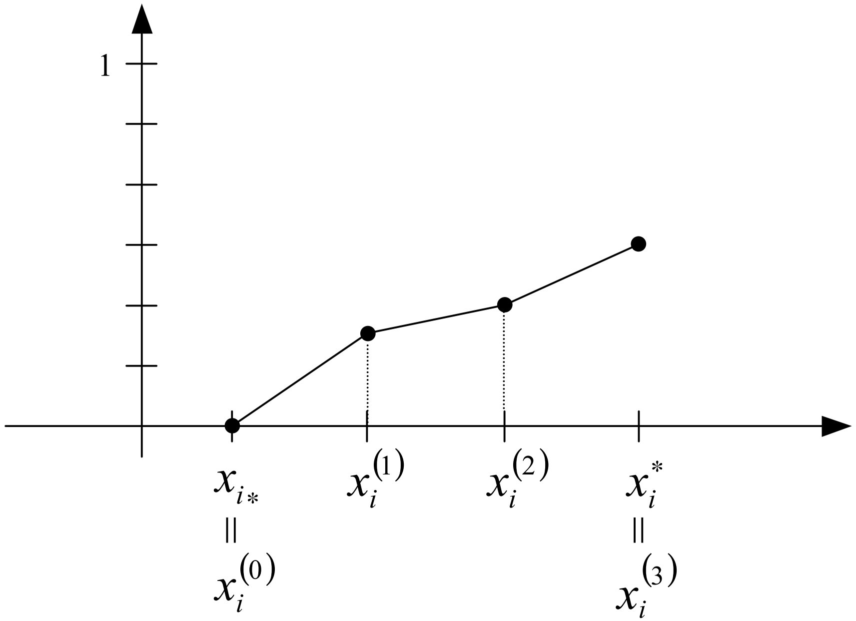
Für eine Wertfunktion $v(x_1, \ldots, x_n) = k_1 v_1(x_1) + \ldots + k_n v_n(x_n)$ mit

1. $v_i(x_{i*}) = 0$ $\quad v_i(x_i^*) = 1$
2. $v_i \uparrow$ (alle maximierten Funktionen monoton steigend)
3. $k_1, \ldots, k_n \geq 0$
4. $k_1 + \ldots + k_n = 1$

werden die Gewichte in die Funktionen „gezogen“, d.h. $k_i v_i(x_i) \rightarrow v_i(x_i)$
(Dann ist $v_i(x_i^*) = k_i < 1$)

Additive Wertfunktion und lineare Programme (2/14)

Jede einattributive Wertfunktion wird als stückweise linear angesetzt, wobei Stützstellen für das Intervall $[x_{i*}, x_i^*]$ vorgegeben werden:



Additive Wertfunktion und lineare Programme (3/14)

GROSSER Trick

nicht die Stückstellen, sondern die Werte der einattributiven Wertfunktionen an den Stückstellen werden zu Variablen des linearen Programms:

$$v_i\left(x_i^{(0)}\right) = 0 \quad \rightarrow \quad x_1 = 0$$

$$v_i\left(x_i^{(1)}\right) - v_i\left(x_i^{(0)}\right) + \delta \geq 0 \quad \rightarrow \quad x_2 - x_1 + \delta \geq 0$$

$$v_i\left(x_i^{(2)}\right) - v_i\left(x_i^{(1)}\right) + \delta \geq 0 \quad \rightarrow \quad x_3 - x_2 + \delta \geq 0$$

$$v_i\left(x_i^{(3)}\right) - v_i\left(x_i^{(2)}\right) + \delta \geq 0 \quad \rightarrow \quad x_4 - x_3 + \delta \geq 0$$

Nebenbedingung

δ : Mindestwertunterschied, $\delta \geq 0$.

Zielfunktion $\max \delta = \max 0 * x_1 + \ldots + 1 * \delta$

Additive Wertfunktion und lineare Programme (4/14)

$$\max \delta$$

s.d. $v_i\left(x_i^{(j+1)}\right) - v_i\left(x_i^{(j)}\right) + \delta \geq 0 \qquad \forall i = 1 \ldots n$

$$\forall j = 1 \ldots m_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} v_i\left(x_i^{(m_i)}\right) = 1$$

$$v_i\left(x_i^{(0)}\right) = 0 \qquad i = 1 \ldots n$$

$$v_i\left(x_i^{(j)}\right), \delta \geq 0$$

LP mit Monotoniebedingung für jede einattributive Wertefunktion und Normierung für gesamte Funktion.

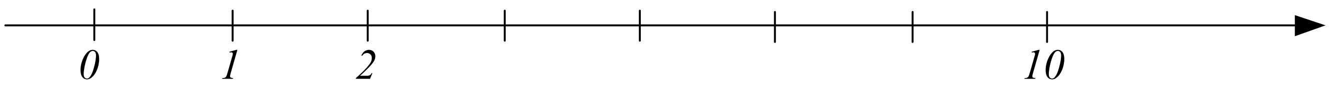
Additive Wertfunktion und lineare Programme (5/14)

Nun folgt Bezugsmenge, d.h. Bewertung auf einer vorgegebenen Menge B von Alternativen

z.B. $(5, 2, 8) \prec (4, 3, 10)$

$[x_{i*}, x_i^*] = [0, 10] \qquad i = 1, 2, 3$

Stützstellen $x_i^{(5)} = j, \qquad j = 0, \ldots, 10$



Präferenzfunktion wird umgesetzt in

$$v_1(4) + v_2(3) + v_3(10) - v_1(5) - v_2(2) - v_3(8) + \delta \geq 0$$

Additive Wertfunktion und lineare Programme (6/14)

Beispiel

$(5.6, 2, 8) \prec (4, 3.5, 10)$ Interpolation zwischen Stützstellen erforderlich

$$\underbrace{v_1(4) + \frac{1}{2} v_2(3) + \frac{1}{2} v_2(4) + v_3(10) - 0.6\, v_1(6) - 0.4\, v_1(5) - v_2(2) - v_3(8) + \delta \geq 0}_{\text{linear in Problemvariablen!}}$$

Additive Wertfunktion und lineare Programme (7/14)

$$\Rightarrow \max \delta$$

$$\sum_{i=1}^{n} v_i\left(x_i^A\right) - \sum_{i=1}^{n} v_i\left(x_i^B\right) + \delta > 0 \qquad \forall A, B \in \mathcal{B} \text{ mit } B \prec A$$

$$\sum_{i=1}^{n} v_i\left(x_i^{(m_i)}\right) = 1$$

$$v_i\left(x_i^{(i+1)}\right) - v_i\left(x_i^{(j)}\right) + \delta \geq 0 \qquad \forall i = 1 \ldots n$$

$$\forall j$$

$$v_i\left(x_i^{(0)}\right) = 0$$

$$v_i\left(x_i^{(i)}\right), \qquad \delta \geq 0$$

LP zur Extrapolation einer Bewertung über Bezugsmenge mittels additiver Wertfunktion

Additive Wertfunktion und lineare Programme (8/14)

Optimalwert $\delta>0$ ⇔ Präferenzen über B mittels streng monotonen, einattributiven Wertfunktionen darstellbar.

Gibt es eine optimale Lösung mit $\delta>0$, so ist der Wert einer beliebigen Alternative A.

$$v\left(x_1^A, \ldots, x_n^A\right) = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{v}_{\uparrow}\left(x_1^A\right)$$

Variable der optimalen Lösung oder
linearen Interpolation davon

alle Alternativen sind (!) bewertet.

Additive Wertfunktion und lineare Programme (9/14)

Extrapolation einer Bewertung von B (z.B. $|B|=10$) auf eine Menge A (z.B. $|A|=5000$)

1. Bestimmung (Erfragung, „expert judgement“) von Präferenzen über B.
2. Lösung des LPs
3. Einsetzen und sortieren (absteigend) von $v\left(x_1^A, \ldots, x_n^A\right)$ für alle A $\in$ A.

Additive Wertfunktion und lineare Programme (10/14)

	Name	Sanie-rungs-bedarf	Lage-rungs-zustand	Abwas-serbe-seitig.	WGK1	WGK2	WGK3
(1)	J1343	nein	RdT	nein	50	55820	0
(2)	J0135	nein	SdT	nein	0	230000	200

Welche Alternative ist gefährlicher, (1) oder (2)?

1 ist gefährlicher

Paarvergleich mit $n=6$ Attributen

Additive Wertfunktion und lineare Programme (11/14)

	Name	Sanie-rungs-bedarf	Lage-rungs-zustand	Abwas-serbe-seitig.	WGK1	WGK2	WGK3
(1)	J1021	mittel	grMgl	nein	0	3100	19000
(2)	J0019	mittel	leMgl	ja	1400	65300	17000
(3)	J0005	nein	RdT	ja	73000	327000	176900
(4)	J2699	mittel	grMgl	ja	33000	2000	0
(5)	J2073	gering	leMgl	nein	150000	800000	0
(6)	J0551	hoch	grMgl	nein	0	39200	0
(7)	J0142	nein	RdT	nein	0	36000	120
(8)	J1343	nein	RdT	nein	50	55820	0
(9)	J0135	nein	SdT	nein	0	230000	200

B

Additive Wertfunktion und lineare Programme (12/14)

	Wert	Name	Sanie-rungs-bedarf	Lage-rungs-zustand	Abwas-serbe-seitig.	WGK1	WGK2	WGK3
(1)	J1587	0.8300	hoch	grMgl	nein	362400	389000	20800
(2)	J0023	0.7603	mittel	grMgl	ja	55000	2600	63000
(3)	J0004	0.6280	hoch	grMgl	ja	10000	110000	0
(4)	*J1021	0.5854	mittel	grMgl	nein	0	3100	19000
(5)	*J0019	0.5755	mittel	RdT	ja	1400	65300	17000
(6)	*J0005	0.5656	nein	grMgl	ja	73000	327000	176900
(7)	J0122	0.5638	hoch	grMgl	ja	4000	2200	0
(8)	*J2699	0.5556	mittel	grMgl	ja	33000	2000	0
(9)	J0413	0.5556	hoch	grMgl	ja	3500	1200	0
(10)	J0169	0.5548	mittel	grMgl	nein	80000	230000	0
…								

A *absteigend sortiert*

Additive Wertfunktion und lineare Programme (13/14)

	Wert	Name	Sanie-rungs-bedarf	Lage-rungs-zustand	Abwas-serbe-seitig.	WGK1	WGK2	WGK3
(91)	J2454	0.2307	gering	leMgl	nein	0	47000	0
(92)	J0313	0.2290	nein	RdT	ja	2700	2800	0
(93)	J0110	0.2284	nein	RdT	ja	0	5150	400
(94)	J1191	0.2280	gering	leMgl	nein	0	41000	0
(95)	J0307	0.2280	gering	leMgl	nein	0	41000	0
(96)	J2608	0.2280	gering	leMgl	nein	0	41000	0
(97)	J2029	0.2276	mittel	leMgl	nein	0	3400	0
(98)	J2452	0.2254	nein	RdT	ja	200	40000	0
(99)	J2693	0.2197	mittel	leMgl	nein	0	1400	0
(100)	J0242	0.2164	mittel	leMgl	nein	0	1000	0
…								

A *absteigend sortiert*

Additive Wertfunktion und lineare Programme (14/14)

	Wert	Name	Sanie-rungs-bedarf	Lage-rungs-zustand	Abwas-serbe-seitig.	WGK1	WGK2	WGK3
(180)	J1227	0.0846	nein	RdT	nein	0	700	0
(181)	J0805	0.0833	nein	RdT	nein	0	540	0
(182)	J0205	0.0780	nein	RdT	nein	0	250	0
(183)	J1814	0.0780	nein	RdT	nein	0	250	0
(184)	J1188	0.0774	nein	RdT	nein	50	120	0
(185)	J1296	0.0770	nein	RdT	nein	50	100	0
(186)	J0610	0.0770	nein	RdT	nein	0	200	0
(187)	J2573	0.0770	nein	RdT	nein	0	200	0
(188)	J0803	0.0756	nein	RdT	nein	0	130	0
(189)	J0248	0.0730	nein	RdT	nein	0	0	0

A *absteigend sortiert*