§1 Lineare Programme in Standardform

LP Standardform

$$\min c^T x$$
$$\text{s.d. } Ax = b$$
$$x \geq 0$$

$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ $c = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ Zielfunktionsvektor

$c^T = (c_1 \dots c_n)$ transponierter Zielfunktionsvektor

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ $m \times n$ Matrix "Restriktionsmatrix"

$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ Restriktionsvektor

$x \geq 0$ ist komponentenweise VZ Bedingung, also
$x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0$.

Alle Problemgrößen in A, b, c und alle Problemvariablen in x sind reell. $n \geq m$.

Alle linearen Programme können auf Standardform transformiert werden.

T. Kämpke, FAW/n
kaempke@faw-neu-ulm.de

Bsp

$$\begin{aligned}
\max\ & 0{,}1\cdot K + 0{,}05\, S \\
\text{s.d.}\ & K + S \le 100 \\
& K \ge 30 \\
& K - 3S \le 0 \\
& K, S \ge 0
\end{aligned}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{aligned}
\min\ & -0{,}1\cdot K - 0{,}05\cdot S - 0\cdot s_1 - 0\cdot s_2 - 0\cdot s_3 \\
\text{s.d.}\ & K + S + s_1 = 100 \\
& -K + s_2 = -30 \\
& K - 3S + s_3 = 0
\end{aligned}$$

$$K, S, s_1, s_2, s_3 \ge 0$$

$$c = \begin{pmatrix} -0{,}1 \\ -0{,}05 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 100 \\ -30 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad x = \begin{pmatrix} K \\ S \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix}$$

$n = 5$ Problemvariablen (leider nicht mehr visualisierbar!)
$m = 3$ Nebenbedingungen.

Jeder Variablen entspricht genau eine Spalte der Restriktionsmatrix.

Transformation eines LP in Standardform

max → min der Zielfunktion durch Mult. mit −1.
min keine Aktion erforderlich

≥ NB → ≤ NB durch Mult. mit −1.

≤ NB → = NB mittels Auffüllen mit nicht-negativer Schlupfvariablen. Zur neutralen Behandlung erhalten Schlupfvariablen den Zielfunktionskoeffizienten 0.

= NB keine Aktion erforderlich

VZ Bedingung Eine Variable x_i, die positiv oder negativ sein darf, wird als Differenz ihres Positiv- und Negativteils dargestellt, d.h.

$$x_i = x_i^+ - x_i^-$$

$$x_i^+ = \max\{0, x_i\}$$

$$x_i^- = -\min\{0, x_i\}$$

$$x_i \geq 0 \Rightarrow x_i = x_i^+ \geq 0$$

$$x_i \leq 0 \Rightarrow x_i = x_i^- \geq 0.$$

Positiv- und Negativteil werden als zwei unabhg. Variablen in Zielfkt. und NB eingeführt, so dass der Koeffizient und die Spalte zu x_i mit positivem und negativem VZ reinkopiert? werden!

Bsp (1)

$$\min \; 2x_1 + 3x_2 - 4x_3$$
$$\text{s.d.} \; 5x_1 + 2x_2 = 18$$
$$x_1, x_3 \geq 0$$

, x_2 ohne Vorzeichenbeschränkung.

$x_2 = x_2^+ - x_2^-$

$$\min \; 2x_1 + 3x_2^+ - 3x_2^- - 4x_3$$
$$\text{s.d.} \; 5x_1 + 2x_2^+ - 2x_2^- = 18$$
$$x_1, x_2^+, x_2^-, x_3 \geq 0$$

$$\min \; 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 4x_4$$
$$\text{s.d.} \; 5x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 18$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0.$$

Die Transformation erhält das Problem, denn für jede zul. Lsg von ① gibt es eine zul. Lsg von ② mit demselben Zielfunktionswert und umgekehrt.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \text{ zul. für ① und } x_2 \geq 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2^+ = x_2 \\ x_2^- = 0 \\ x_3 \end{pmatrix} \text{ ist zul für ②}$$

mit demselben Zielfunktionswert

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \text{ zul. für ① und } x_2 \leq 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2^+ = 0 \\ x_2^- = -x_2 \\ x_4 \end{pmatrix} \text{ ist zul für ②}$$

mit demselben Zielfunktionswert

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2^+ \\ x_2^- \\ x_3 \end{pmatrix} \text{ zul für ②} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2^+ - x_2^- \\ x_3 \end{pmatrix} \text{ zul für ① mit demselben}$$

Zielfunktionswert.

20.6.

Der Zulässigkeitsbereich eines LP (in Standard Form) ist konvex, d.h. mit $x, z \in \mathbb{R}^n$ und $Ax = b = Az$, $x, y \geq 0$ ist auch die Konvexkombination $\alpha x + (1-\alpha) z$ zulässig $\forall \alpha \in (0,1)$.

Konvexkombination: Verbindungsstrecke

$\alpha x + (1-\alpha) z$

z

x

$\alpha x + (1-\alpha) z$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$: affine Kombination von x und z.

Nachweis der Konvexität: $A(\alpha x + (1-\alpha) z) = \alpha A x + (1-\alpha) A z$

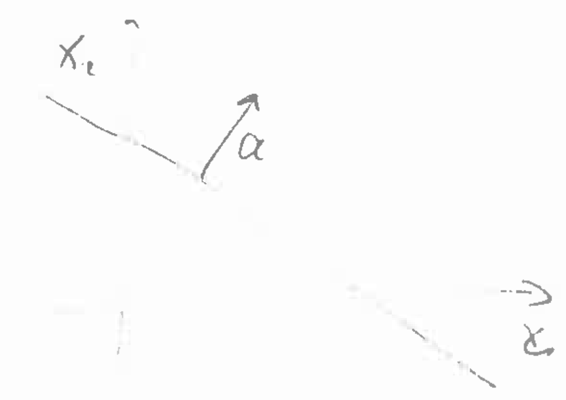
$= \alpha \cdot b + (1-\alpha) b$

$= b$ ✓

$\alpha x + (1-\alpha) z \geq \alpha \cdot 0 + (1-\alpha) \cdot 0 = 0$ ✓

Der Zulässigkeitsbereich eines LP kann auch als Durchschnitt von Hyperebenen gesehen werden. Hyperebene $H = \{x \mid a^T x = b\}$, $a \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}$. (im $\mathbb{R}^2$: Gerade)

$\{x \mid (a_1, a_2)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = b\} = \{x \mid a_1 x_1 + a_2 x_2 = b\}$ Hesseform der Geradengleichung.



$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = b$

Jede NB eines LP in Standardform entspricht einer Hyperebene

$a_{j1} x_1 + \ldots + a_{jn} x_n = b_j \qquad j = 1..m$ (Zeile j der Restriktionsmatrix)

Jede Hyperebene ist konvex und der Durchschnitt konvexer Mengen ist konvex $\Rightarrow$ Die Menge aller Vektoren, die die NB erfüllen, ist konvex.

Der positive Orthant $\{x \mid x \geq 0\} = \{x \mid x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0\}$ ist konvex $\Rightarrow$ Der Zulässigkeitsbereich M ist konvex.

$M = \{x \mid Ax = b, x \geq 0\}$

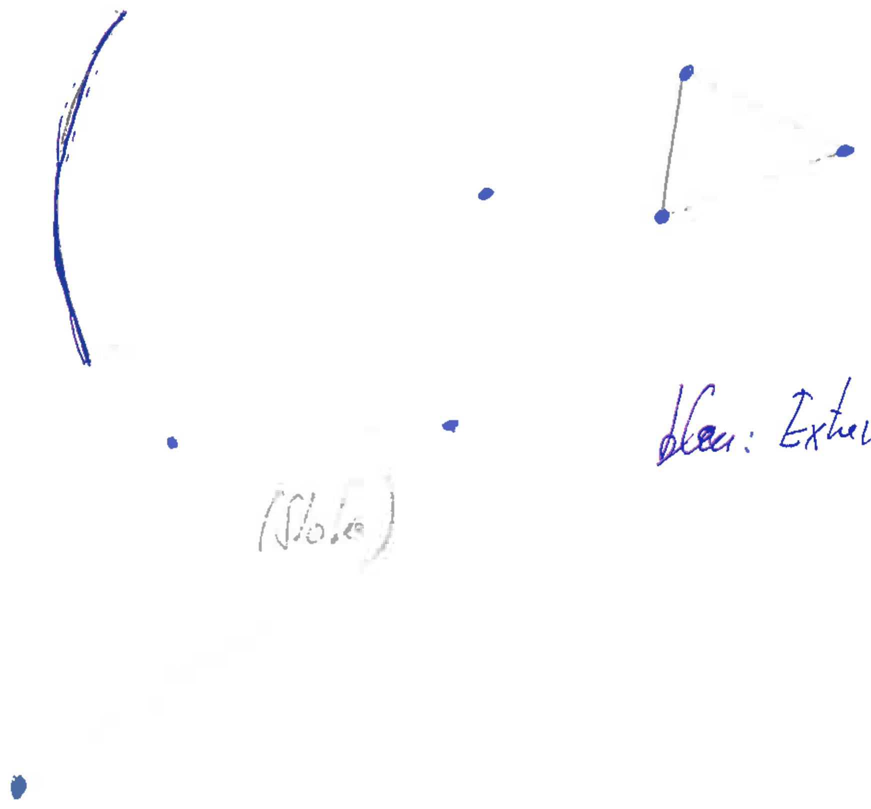
Intuition: Jede Hyperebene im $\mathbb{R}^n$ beinhaltet einen unendlichen und geschlossenen Unterraum der Dimension $n-1$
(Ebene → Gerade $n=2$; Raum → Ebene $n=3$; ...)

Aber: Eine Hyperebene enthält kein Inneres!

---

x ist Extremalpunkt einer konvexen Menge M, wenn er nicht als Konvexkombination von zwei anderen Punkten der Menge dargestellt werden kann. Bezeichnung: $E(M)$ ist die Menge aller Extremalpunkte von M.

Beispiele:

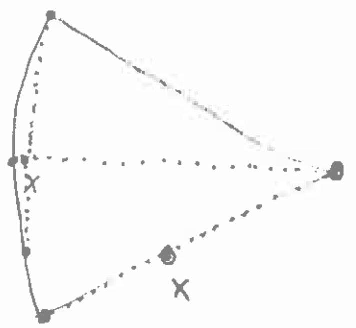


blau: Extremalpunkte

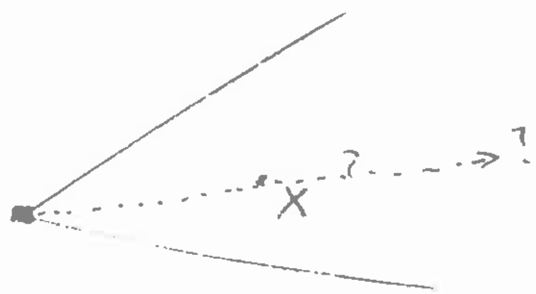
(Skizze)

(Skizze)

In einer konvexen und beschränkten Menge" ist jeder Punkt als Konvexkombination von Extremalpunkten darstellbar, oder selber Extremalpunkt, d.h. $\forall x \in M \; \exists a, b \in E(M)$ mit $x = \alpha a + (1-\alpha) b$ und $\alpha \in [0,1]$.



Auf "beschränkt" kann nicht verzichtet werden, siehe Kegel:



Achtung: Extremalpunkte einer konvexen Menge brauchen nicht zur konvexen Menge zu gehören, die konvexe Menge kann "offen" sein!

Satz
$$\min c^T x$$
$$\text{s.d. } x \in M$$

M konvex und beschränkt $\Rightarrow$ Es gibt unter den optimalen Punkten mind. einen Extremalpunkt von M.

Beweis. Ann. $c^T x_0 < c^T a \quad \forall a \in E(M)$

$\Rightarrow x_0$ ist selber kein Extremalpunkt

$\Rightarrow \exists a, b \in M \quad \alpha \in (0,1)$ mit $x_0 = \alpha a + (1-\alpha) b$

$$\Rightarrow c^T x_0 = c^T(\alpha a + (1-\alpha) b)$$
$$= \alpha \underbrace{c^T a}_{> c^T x_0} + (1-\alpha) \underbrace{c^T b}_{> c^T x_0}$$
$$> \alpha c^T x_0 + (1-\alpha) c^T x_0$$
$$= c^T x_0 .$$
Widerspruch

Folgerung. Die Suche nach dem Optimum eines linearen Programms kann auf die Suche in den Extremalpunkten beschränkt werden.

§2 Struktur von LP's

<u>Satz</u> Für einen Extremalpunkt x^0 eines LP (in Standardform) sind die Spalten zu positiven Koordinaten linear unabhg.

$$Ax = b = (A_1, \ldots, A_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot A_i,$$

wobei A_i die Spalten der Restriktionsmatrix sind. "Spalten zu Koordinaten" bedeutet: gleicher Index.

<u>Beweis</u>. Die Spalten und Koordinaten werden umsortiert, so dass alle k positiven Koordinaten vorne stehen, d.h.

$$b = \sum_{i=1}^{n} x_i^0 A_i = \sum_{i=1}^{k} \underbrace{x_i^0}_{>0} A_i + \sum_{i=k+1}^{n} \underbrace{x_i^0}_{=0} A_i$$

$$= \sum_{i=1}^{k} x_i^0 A_i .$$

Ann. Die Spalten mit pos. Koordinaten sind lin. abhg, d.h. $\sum_{i=1}^{k} d_i A_i = 0$ mit mind. einem $d_i \neq 0$, alle d_i reelle Zahlen.

$$\Longrightarrow \sum_{i=1}^{k} d \cdot d_i \cdot A_i = 0$$ mit mind. einem $d_i \neq 0$ und $d \neq 0$ beliebig.

$$b = b + 0 = \sum_{i=1}^{k} x_i^0 A_i + \sum_{i=1}^{k} d d_i A_i = \sum_{i=1} (x_i^0 + d d_i) A_i \quad \text{und}$$

$$b = b - 0 = \sum_{i=1}^{k} (x_i^0 - d d_i) A_i$$

d kann so klein gewählt werden, dass mit $x_i^0 > 0$ auch

$$x_i^0 + d d_i > 0 \text{ und } x_i^0 - d d_i > 0 \quad \forall i = 1..k$$

(vgl. "Störung")

$$\Rightarrow x^* = \begin{pmatrix} x_1^0 + d d_1 \\ x_2^0 + d d_2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } x^{**} = \begin{pmatrix} x_1^0 - d d_1 \\ x_2^0 - d d_2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \text{ sind}$$

zulässig.

Aber $x^0 = \frac{1}{2} x^* + \frac{1}{2} x^{**}$, d.h. x^0 nicht extremal. Widerspruch

Das vorangegangene Ergebnis ist maximal in dem Sinne, dass die Spalten zu positiven Koordinaten eine Basis des Restriktionsmatrix bilden, sofern die Spalten der Restriktionsmatrix eine Basis enthalten.

Satz Für einen Extremalpunkt x^0 eines LP (in Standardform), dessen Restriktionsmatrix eine Basis enthält, sind die Spalten zu positiven Koordinaten eine Basis oder können durch Zunahme von Spalten mit Koordinaten $= 0$ zu einer Basis ergänzt werden.

(nicht hinreichend wg Steinitz'schem Austauschsatz)

Beweis

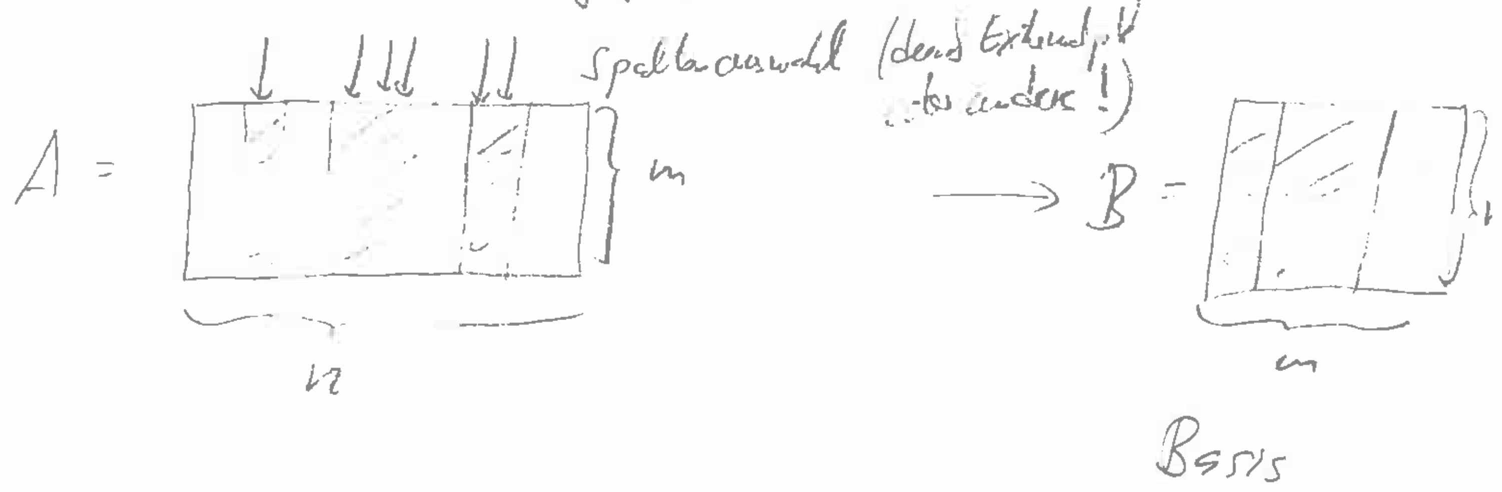
$$b = \sum_{i=1}^{n} x_i^0 A_i = \sum_{i=1}^{\ell} \underbrace{x_i^0}_{>0} A_i + \sum_{i=\ell+1}^{n} \underbrace{x_i^0}_{=0} A_i = \sum_{i=1}^{\ell} x_i^0 A_i$$

1\. Fall $\ell = m$: nach voriger. Satz

2\. Fall $\ell < m$: Zu den Spalten $A_1 \ldots A_\ell$ können nun weitere gefunden werden so, dass nach Umordnung $A_1 \ldots A_\ell, A_{\ell+1} \ldots A_r$ lin. unabh. und $A_{r+1} \ldots A_n$ davon linear abhängig, $r < m$.

$\Rightarrow$ Es gibt nur $r < m$ lin. unabh. Spalten, also Widerspruch dazu, dass A eine Basis enthält. $\perp$

"Visualisierung" des vorangegangenen



$n \geq m$

Jeder Extremalpunkt führt auf eine Basis, aber nicht jede Basis führt auf Extremalpunkt, da die Nichtnegativität verletzt sein kann. Wie von Basis zu Extremalpkt?

Umsortieren:

$x^0 = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix}$ $\quad$ x_B Teilvektor der Koordinaten, die zu einer Basis B gehören

x_N: Teilvektor der Koordinaten, die nicht zur Basis gehören

x^0 Extremalpkt $\underset{(5.0)}{\Rightarrow}$ $x_N = 0$

Nullvektor 0 oder 0

$$b = Ax = (B, N)\begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix} = B \cdot x_B + N \underset{\overset{\shortparallel}{0}}{x_N} = B x_B$$

$\Longrightarrow x_B = B^{-1} b$

$\Longrightarrow$ Extremalpunkte sind von der Form $\begin{pmatrix} B^{-1} b \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

__Definition__ Ein Vektor, der bis auf Vertauschung seiner Koordinaten von der Form $\begin{pmatrix} B^{-1} b \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ ist, heißt __Basislösung__. Eine Basislösung mit $B^{-1} b \geq 0$ heißt __zulässige Basislösung__.

Das Optimum eines LP wird unter den zulässigen Basislösungen gesucht!

Def Ein LP in Standardform heisst <u>nicht-degeneriert</u>, falls

1. Die m Zeilen von A sind linear unabhängig (d.h. $\operatorname{rg} A = m$) und
2. b ist keine Linearkombination von weniger als m Spalten von A (d.h. insbes. $b \neq 0$).

Es werden nur nicht-degenerierte LPs behandelt.

<u>Satz</u> Eine zul. Basislsg x^0 ist optimal für

$$\begin{aligned} &\min c^T x \\ &\text{s.d. } Ax = b \\ &\qquad x \geq 0, \end{aligned}$$

falls $z_j - c_j \leq 0 \quad \forall j = m+1, \ldots, n$, (Nichtbasis)

wobei $z_j = c_B^T \cdot B^{-1} \cdot A_j$ mit

$$x^0 = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } c_B = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}$$

Vektor der Zielkoeff. der Basis

$z_j - c_j$ heissen auch <u>"reduzierte Kosten"</u> oder <u>"Schattenpreise"</u>

Naives Algorithmus

- Auswahl von m Spalten
- Gruppierung der Spalten als quadratische Matrix B
- Inversion
- Test auf Zulässigkeit $B^{-1}b \geq 0$

  Falls ja, Test auf Optimalität $c_B^T B^{-1} A_j - c_j \leq 0$

  $\forall j$ mit n

  Falls ja, Optimale Basislösung gefunden

- Nächste Auswahl.

Verbesserung Basisaustausch, d.h. von Basis zu Basis wird nur eine Spalte ausgetauscht

$B = (A_1 \ldots A_m) \longrightarrow B^{neu} = (A_1 \ldots \cancel{A_i} \ldots A_m A_j)$

mit $1 \leq i \leq m < j \leq n$

Optimalität wird mittels reduzierter Kosten überprüft.

§3 Simplexalgorithmus

Situationen: Zulässigkeitsbereich leer ⓪ (keine Zeichnung)

Zulässigkeitsbereich beschränkt

- Optimum eindeutig ①
- Optimum mehrdeutig ② "alternative Optima"

Zulässigkeitsbereich unbeschränkt

- Optimum eindeutig ③
- Optimum mehrdeutig ④
- ZielFkt unbeschränkt (min $\to -\infty$, max $\to +\infty$) ⑤

Sämtliche sechs Situationen werden vom Simplexalgorithmus erkannt. Keine "Abfragen" vor Start erforderlich.

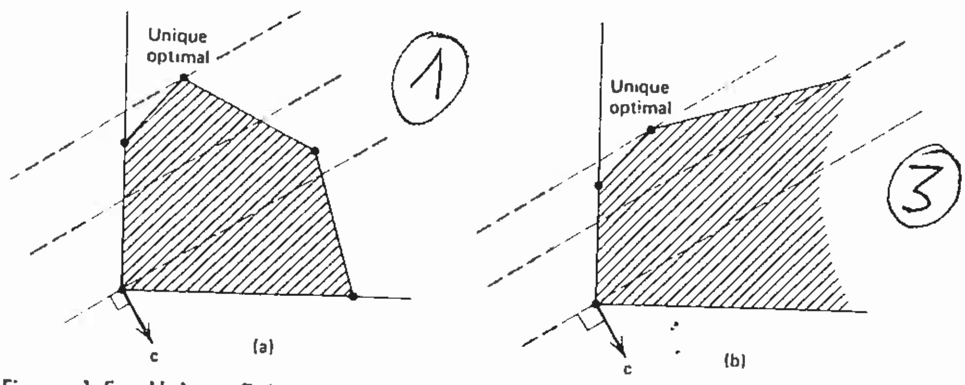


Figure 1.5. **Unique finite optimal solution: (*a*) Bounded region. (*b*) Unbounded region.**

1. *Unique Finite Optimal Solution*. If the optimal finite solution is unique, then it occurs at an extreme point. Figures 1.5*a* and *b* show a unique optimal solution. In Figure 1.5*a* the feasible region is bounded; that is, there is a ball around the origin that contains the feasible region. In Figure 1.5*b* the feasible region is not bounded. In each case, however, the unique optimal solution is finite.
2. *Alternative Finite Optimal Solutions*. This case is illustrated in Figure 1.6. Note that in Figure 1.6*a* the feasible region is bounded. The two corner points $\mathbf{x}_1^*$ and $\mathbf{x}_2^*$ are optimal, as well as any point on the line segment joining them. In Figure 1.6*b* the feasible region is unbounded but the optimal objective is finite. Any point on the "ray" with vertex $\mathbf{x}^*$ in Figure 1.6*b* is optimal. Hence the *optimal solution set* is unbounded.

In both cases (1) and (2), it is instructive to make the following observation. Pick an optimal solution $\mathbf{x}^*$ in Figure 1.5 or 1.6, corner point

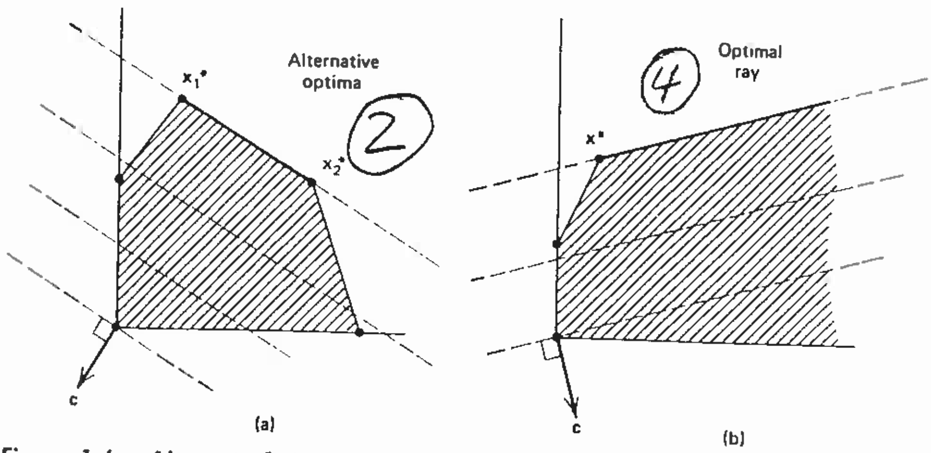


Figure 1.6. **Alternate finite optima: (*a*) Bounded region. (*b*) Unbounded region.**

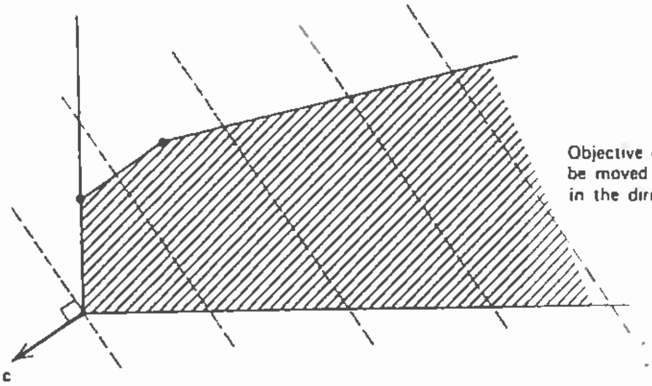


Figure 1.7. **Unbounded optimal solution.**

or not. Draw the normal vectors to the constraints passing through $\mathbf{x}^*$ pointing in the outward direction with respect to the feasible region. Also construct the vector $-\mathbf{c}$ at $\mathbf{x}^*$. Note that the "cone" spanned by the normals to the constraints passing through $\mathbf{x}^*$ contains the vector $-\mathbf{c}$. This is in fact the necessary and sufficient condition for $\mathbf{x}^*$ to be optimal, and will be formally established later. Intuitively, when this condition occurs, one can see that there is no direction along which one can move and improve the objective function while remaining feasible. Such a direction would have to make an acute angle with $-\mathbf{c}$ to improve the objective value and simultaneously make an angle $\geq 90°$ with respect to each of the normals to the constraints passing through $\mathbf{x}^*$ in order to maintain feasibility for some step length along this direction. This is impossible at any optimal solution, although it is possible at any nonoptimal solution.

3. *Unbounded Optimal Solution Value*. This case is illustrated in Figure 1.7 where both the feasible region and the optimal solution value are unbounded. For a minimization problem the plane $\mathbf{cx} = z$ can be moved in the direction $-\mathbf{c}$ indefinitely while always intersecting with the feasible region. In this case the optimal objective value is unbounded with value $-\infty$ and *no optimal solution exists*.
4. *Empty Feasible Region*. In this case the system of equations and/or inequalities defining the feasible region is *inconsistent*. To illustrate, consider the following problem.

$$\begin{array}{ll} \text{Minimize} & -2x_1 + 3x_2 \\ \\ \text{Subject to} & -x_1 + 2x_2 \leq 2 \\ & 2x_1 - x_2 \leq 3 \\ & \phantom{2x_1 - {}} x_2 \geq 4 \\ & x_1, \quad x_2 \geq 0 \end{array}$$

Zwischen Extremalpunkten ("Geometrie") und zul. Basislösungen ("Algebra") besteht keine eineindeutige Zuordnung: Identische Basen können auf verschiedene Extremalpunkte führen.

<u>Bsp</u>

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 9 & 7 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 9 \\ 39 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 9 \end{pmatrix} = (A_1, A_3) \qquad x_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \longrightarrow x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$B' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 9 \end{pmatrix} = (A_2, A_3) \qquad x_{B'} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \longrightarrow x' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2 Phasen des prinzipiellen Vorgehens des Simplexalgorithmus

1. Phase Es wird eine zul. Basislösung angegeben oder gezeigt, dass es keine solche gibt (→ Zul. bereich leer)

2. Phase Von einer zul. Basislösung ausgehend wird eine optimale gefunden oder gezeigt, dass es keine solche gibt (→ Zielfunktion unbeschränkt ⑤)

Bemerkenswert: 1. Phase wird auf 2. Phase zurückgeführt. ("Teekesselprinzip")

1. Phase Das LP in Standardform wird mittels Hilfsvariablen in ein erweitertes Problem transformiert

$$\begin{aligned} &\min\ c^T x \\ &\text{s.d. } Ax = b \\ &\quad\ \ x \geq 0 \end{aligned} \longrightarrow \begin{aligned} &\min\ e^T z \\ &\text{s.d. } (A, I)\begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} = b \\ &\quad\ \ \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} \geq 0 \end{aligned}$$

Dann ist $b \geq 0$, d.h. jede NB mit $b_j < 0$ wird mit -1 durchmultipliziert.

$$\min \; 2x_1 - 3x_2 + 8x_3$$

$$\text{s.d.} \quad \begin{aligned} 5x_1 - 7x_2 &= -23 \\ 4x_1 \qquad - x_3 &= 17 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\downarrow$$

$$\min \; z_1 + z_2$$

$$\text{s.d.} \quad \begin{aligned} -5x_1 + 7x_2 \qquad + z_1 \qquad &= 23 \\ 4x_1 \qquad - x_3 \qquad + z_2 &= 17 \\ x_1, x_2, x_3, z_1, z_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

in Matrixschreibweise

$$\min \; (1,1)\, z$$

$$\begin{pmatrix} -5 & 7 & 0 & \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}} \\ 4 & 0 & -1 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} = b$$

$$x \geq 0 \quad z \geq 0$$

Ergebnis: $\quad z_1 = b_1 = 23$

$\qquad\qquad z_2 = b_2 = 17$

ist zul. Basislsg mit $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ für das Ersatzproblem.

Die Minimierung der Summe aller nicht-negativen Hilfsvariablen erzeugt "Druck", diese aus der Basis zu eliminieren.

2.7. Ge 1

1. Fall Am Ende von Phase 1 ist $\binom{x}{z}$ eine opt. Basislösung des Ersatzproblems mit $\min \sum_{i=1}^{m} z_i = 0$.

$\Rightarrow$ x ist zul. Basislsg des ursprünglichen Problems

2. Fall Am Ende von Phase 1 ist $\binom{x}{z}$ eine opt. Basislösung des Ersatzproblems mit $\min \sum_{i=1}^{m} z_i > 0$.

$\Rightarrow$ es gibt keine zul. Basislsg des ursprünglichen Problems.

$\Rightarrow$ Phase 1 abgeschlossen.

Unterschied zwischen Hilfsvariablen und Schlupfvariablen

Hilfsvariablen verändern das ursprüngliche Problem in den NB und in der Zielfunktion. Alle Hilfsvariablen sind zu eliminieren.

Schlupfvariablen verändern das ursprüngliche Problem nicht.

Phase 2: Für eine zul. Basislösung B wird deren Optimalität mittels $z_j - c_j = c_B^T B^{-1} A_j - c_j \leq 0 \; \forall j = m+1, \dots, n$ getestet.
Dann wird B^{-1} benötigt bzw $B^{-1} A_j$ für alle Nichtbasisspalten A_j und $B^{-1} b$.

Weiterkommen: von einer Basislösung $B = (A_1 \dots A_m)$ erfolgt Übergang zu $B' = (A_1, \dots, A_i, \dots, A_m, A_j)$ mit $1 \leq i \leq m < j \leq n$,
d.h. eine Spalte der Restriktionsmatrix wird neu aufgenommen, eine wird eliminiert.

Reihenfolge:

1. Aufgabe: Bestimmung einer Nichtbasisspalte A_j zur Aufnahme in die Basis.

2. Aufgabe: Bestimmung einer Basisspalte A_i zur Elimination aus der Basis.

3. Aufgabe: Aktualisierung aller Berechnungen.

1. Aufgabe

$B = (A_1, A_m)$

A_j sei eine Nichtbasisspalte. A_j kann mittels der Spalten von B dargestellt werden: $A_j = B \cdot x^{(j)}$

$$= A_1 \cdot x_1^{(j)} + \dots + A_m x_m^{(j)}$$

$$\Rightarrow x^{(j)} = B^{-1} A_j.$$

Eine Spalte A_j wird "ein bisschen" in die Lösung aufgenommen ("Störung")

$$b = \sum_{i=1}^{m} x_i A_i = \lambda \cdot A_j + \left(\sum_{i=1}^{m} x_i A_i\right) - \lambda A_j$$

$$= \lambda A_j + \sum_{i=1}^{m} x_i A_i - \sum_{i=1}^{m} \lambda x_i^{(j)} A_i$$

$$= \lambda A_j + \sum_{i=1}^{m} \left(x_i - \lambda x_i^{(j)}\right) A_i \quad , \lambda > 0 \text{ klein}$$

Mit $\lambda \geq 0$ und $x_i > 0$ ist auch $x_i - \lambda x_i^{(j)} \geq 0$, d.h. die gestörte Lösung ist zulässig.

Zielfunktionswert aktuelle Basislösung $\sum_{i=1} c_i x_i$

Zielfunktionswert neue, gestörte Lösung $\lambda c_j + \sum_{i=1}^{m} \left(x_i - \lambda x_i^{(j)}\right) c_i$

neue Kosten - alte Kosten $= \lambda c_j + \sum_{i=1}^{m} (x_i - x_i^{(j)} \lambda) c_i - \sum_{i=1}^{m} c_i x_i$

$$= \lambda c_j - \lambda \sum_{i=1}^{m} c_i x_i^{(j)}$$

$$= \lambda \left(c_j - c_B^T x^{(j)}\right)$$

$$= \lambda \left(c_j - \underbrace{c_B^T B^{-1} A_j}_{= z_j}\right)$$

$$= \underbrace{- \underset{\substack{\vee \\ 0}}{\lambda}}_{<0} \underbrace{(z_j - c_j)}_{>0} < 0, \text{ falls } z_j - c_j > 0$$

Die Aufnahme einer Nichtbasisspalte mit $z_j - c_j > 0$ in die gestörte Lösung führt für $\lambda > 0$ auf eine Verringerung der Kosten. Unter den Nichtbasisspalten mit $z_j - c_j > 0$ wird eine ausgewählt. Verschiedene Auswahlkriterien sind der wesentliche Bestandteil verschiedener Varianten des Simplex-algorithmus!

2. Aufgabe

Wie weit darf/soll gelaufen werden, d.h. wie gross soll λ gewählt werden?

Sei für j $x_i^{(j)} \le 0 \Rightarrow \lambda$ kann bel. gross gewählt werden, ohne Zulässigkeit zu verlassen.

Sei für j $x_i^{(j)} > 0$

$$x_i - \lambda x_i^{(j)} \ge 0 \Leftrightarrow x_i \ge \lambda x_i^{(j)}$$

$$\Rightarrow \frac{x_i}{x_i^{(j)}} \ge \lambda$$

Wähle $\lambda_0 = \min_i \left\{ \frac{x_i}{x_i^{(j)}} \;\middle|\; x_i^{(j)} > 0 \right\}$. Der Index für dieses Minimum gibt die Spalte A_i an, deren Koordinate zu 0 wird, d.h. aus der Basis eliminiert wird!

Unsymmetrie: Es besteht typischerweise eine Auswahl von Nichtbasisspalten zur Aufnahme in die Basis. Ist diese Spalte aber gewählt, so bleibt typischerweise keine Auswahl bei der zu eliminierenden Spalte.

Bestandsaufnahme

$z_j - c_j < 0 \quad \forall j \in \{m+1, \ldots, n\}$ und

$\Rightarrow$ Situationen ① oder ③

$z_j - c_j \leq 0 \quad \forall j \in \{m+1, \ldots, n\}$ und

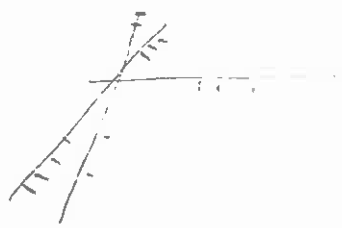
$z_j - c_j = 0$ für mind ein $j \in \{m+1, \ldots, n\}$ mit $\lambda_0 > 0$

$\Rightarrow$ Alternative optimale Basislsg ②

$z_j - c_j \leq 0 \quad \forall j \in \{m+1, \ldots, n\}$ und

$z_j - c_j < 0$ für mind ein $j \in \{m+1, \ldots, n\}$ mit $\lambda_0 = 0$

$\Rightarrow$ Alternative optimale Basislsg



$z_j - c_j \leq 0 \quad \forall j \in \{m+1, \ldots, n\}$ und

$z_j - c_j = 0$ für mind ein $j \in \{m+1, \ldots, n\}$ mit $\lambda_0 = \infty$

$$= \min\left\{ \frac{x_i}{x_i^{(j)}} \,\middle|\, x_i^{(j)} > 0 \right\},$$

d.h. alle $x_i^{(j)} \leq 0$

$\Rightarrow$ Alternative Optima, die keine Basislösungen sind und auf dem Rand (Strahl) liegen ④

$z_j - c_j > 0$ für mind ein $j \in \{m+1, \ldots, n\}$ mit $\lambda_0 = \infty$

d.h. alle $x_i^{(j)} \leq 0$

$\Rightarrow$ Zielfunktion nach unten unbeschränkt ⑤

$z_j - c_j > 0$ für mind ein $j \in \{m+1, \ldots, n\}$ mit $\lambda_0 = 0$

$\Rightarrow$ Basislsg nicht optimal, aber trotzdem verbessert der aktuelle Austausch die Zielfunktion nicht

(5, 0,)

Extrempunkt ist "überbestimmt" und nicht optimal.

3. Aufgabe

Für alle Nichtbasisspalten $A_{m+1}, .., A_n$ und für den Restriktionsvektor b werden die Vektoren

$$B^{-1}A_{m+1}, .. B^{-1}A_n \text{ und } B^{-1}b$$

für jede der iterativ bestimmten zulässigen Basen B berechnet. Zweck:

$B^{-1}b \longrightarrow$ zul. Basislösung

$B^{-1}A_{m+1}, .., B^{-1}A_n \longrightarrow$ reduzierte Kosten

Für die Berechnungen gibt es zwei Möglichkeiten

Explizite Berechnung von B^{-1}

"Revidierter Simplexalgorithmus"

Direkte Berechnung der Spalten $B^{-1}A_{m+1}, .., B^{-1}A_n, B^{-1}b$ (ohne B^{-1})

"Simplextableaualgorithmus" (ursprünglich)

Sei $B = (A_1 \; A_m)$ geg und

$B^{-1}b$, $B^{-1}A_{m+1} = x^{(m+1)}$, .., $B^{-1}A_n = x^{(n)}$

$B - \{A_i\} + \{A_j\} = B'$ $\quad 1 \le i \le m < j \le n$

$\Rightarrow$ Berechnung von $B'^{-1}b = ..$

$B'^{-1}A_j = e_j$ (braucht nicht bestimmt zu werden)

$B'^{-1}A_i = ..$

$B'^{-1}A_\varrho = ...$ $\quad m < \varrho \le n, \; \varrho \ne j$ (Spalten, die ausserhalb der alten und neuen Basis liegen)

$$b = x_1 A_1 + \; + x_m A_m$$

$$= \lambda_0 A_j + \sum_{\ell=1}^{m} x_\ell A_\ell - \lambda_0 \cdot \sum_{\ell=1}^{m} x_\ell^{(j)} A_\ell \qquad \underline{= A_j}$$

$$= \lambda_0 A_j + \sum_{\ell=1}^{m} \left(x_\ell - \lambda_0 x_\ell^{(j)}\right) A_\ell$$

λ_0 wurde so gewählt, dass $x_i - \lambda_0 x_i^{(j)} = 0$

$$= \lambda_0 A_j + \sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell \ne i}}^{m} \left(x_\ell - \lambda_0 x_\ell^{(j)}\right) A_\ell$$, d.h. b wird durch

$B' = (A_1 .. \cancel{A_i} .. A_m \; A_j)$ linear kombiniert.

$$\Rightarrow B'^{-1} b = \begin{pmatrix} x_1 - \lambda_0 x_1^{(j)} \\ \vdots \\ \otimes \\ \vdots \\ x_m - \lambda_0 x_m^{(j)} \\ \lambda_0 \end{pmatrix} \leftarrow i \text{ entfällt}$$

$$A_i = 0 \cdot A_1 + \dots + 1 \cdot A_i + \dots + 0 \cdot A_m + \mu A_j - \mu A_j$$

$$= 0 A_1 + \dots + 1 \cdot A_i + \dots + 0 \cdot A_m + \mu A_j - \mu \sum_{l=1}^{m} x_l^{(j)} A_l$$

$$= (0 - \mu \cdot x_1^{(j)}) A_1 + \dots + \underbrace{(1 - \mu \cdot x_i^{(j)})}_{\text{zu } 0 \text{ machen!}} A_i + \dots + (0 - \mu x_m^{(j)}) A_m + \mu A_j$$

$$\Rightarrow \mu = \frac{1}{x_i^{(j)}}$$

$$\Rightarrow B'^{-1} A_i = \begin{pmatrix} -\frac{x_1^{(j)}}{x_i^{(j)}} \\ \vdots \\ \otimes \\ \vdots \\ -\frac{x_m^{(j)}}{x_i^{(j)}} \\ \frac{1}{x_i^{(j)}} \end{pmatrix} \leftarrow i \text{ entfällt}$$

$$A_k = x_1^{(k)} A_1 + \dots + x_i^{(k)} A_i + \dots + x_m^{(k)} A_m + \mu A_j - \mu A_j$$

$$= \left(x_1^{(k)} - \mu x_1^{(j)}\right) A_1 + \dots + \underbrace{\left(x_i^{(k)} - \mu x_i^{(j)}\right)}_{\text{и 0 модел}} A_i + \dots + \left(x_m^{(k)} - \mu x_m^{(j)}\right) A_m + \mu A_j$$

$$\Longrightarrow \mu = \frac{x_i^{(k)}}{x_i^{(j)}}$$

$$B^{-1} A_k = \begin{pmatrix} x_1^{(k)} - \dfrac{x_i^{(k)}}{x_i^{(j)}} x_1^{(j)} \\ \vdots \\ 0 \\ \\ x_m^{(k)} - \dfrac{x_i^{(k)}}{x_i^{(j)}} x_m^{(j)} \\ \dfrac{x_i^{(k)}}{x_i^{(j)}} \end{pmatrix} \leftarrow i$$

Phase 2 des Simplexalgorithmus für

$$\min c^T x$$
$$\text{s.t. } Ax = b$$
$$x \geq 0$$

mit endlichem Optimalwert

Initialisierung. Für eine zul. Basis $B = (A_1, \dots, A_m)$ sind $B^{-1}b$ und $B^{-1}A_{m+1}, \dots, B^{-1}A_n$ bekannt (aus Phase 1 mit initialer Basis $B = I$).

While $\exists j \in \{m+1, \dots, n\}$ mit $z_j - c_j = c_B^T B^{-1} A_j - c_j > 0$ do

1. Wahl eines j mit $z_j - c_j > 0$.
2. Bestimmung von i in $\min_{i \leq n} \left\{ \frac{x_i}{x_i^{(j)}} \,\middle|\, x_i^{(j)} > 0 \right\}$ für $x = B^{-1}b$ und $x^{(j)} = B^{-1}A_j$.
3. $B' = B - \{A_i\} + \{A_j\}$
4. Berechnung von $B'^{-1}b$, $B'^{-1}A_i$ und $B'^{-1}A_k$ $\forall k = m+1, \dots, n$, $k \neq i$, wie oben.
5. Neue Nummerierung und Bezeichnung $B = (A_1, \dots, A_m)$.

Ausgabe. Optimale Lösung $B^{-1}b$ mit $B = (A_1 \dots A_m)$ und Optimalwert $c_B^T B^{-1} b$.

Lineare Optimierung und nicht-lineare Probleme

Brauerei Pauschbräu braut 3 Biersorten

Sorte	Erlös pro Fass	Exzesserlös pro Fass	Gerste pro Fass	Hopfen pro Fass	Arbeit pro Fass
Süssherb S	16	15 bei mehr als 120	15	20	12
Vollkraft V	13	12 bei mehr als 135	13	17	11
Urstei U	10,5	9,5 bei mehr als 90	10	16	1

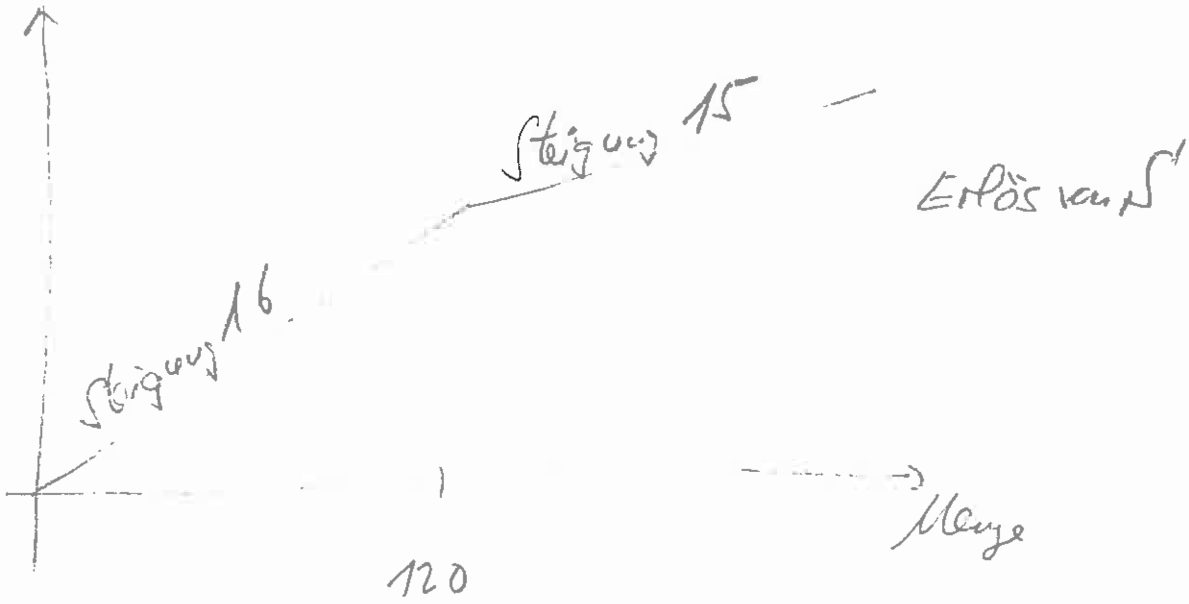
Gesamtgerste 5955
Gesamthopfen 8539
Gesamtarbeit 3300

Lieferverpflichtung 490 Fass, egal welcher Sorte.

1. Optimaler Produktionsmix. Wieviel Fass sollte die Brauerei herstellen um den Erlös zu maximieren? (Nicht-linear)

2. Postoptimale Analyse. Ist unter ansonsten gleichen Bed. eine Änderung der Lieferverpflichtung von 490 Fass empfehlenswert?

Problem 1. Das Problem erscheint nicht-linear, da es Sprünge in den Erlösen gibt.



Der optimale Produktmix kann aber trotzdem mit einem <u>einzigen</u> LP bestimmt werden.

Ansatz:

$$\max\ 16x_1 + 13x_2 + 10{,}5x_3 + 15x_4 + 12x_5 + 9{,}5x_6$$

wobei
$$15x_1 + 13x_2 + 10x_3 + 15x_4 + 13x_5 + 10x_6 \leq 5955$$
$$20x_1 + 17x_2 + 16x_3 + 20x_4 + 17x_5 + 16x_6 \leq 8535$$
$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \geq 490$$
$$12x_1 + 11x_2 + x_3 + 12x_4 + 11x_5 + x_6 \leq 3300$$

$$x_1, \ldots, x_6 \geq 0$$

$$x_1 \leq 120$$
$$x_2 \leq 135$$
$$x_3 \leq 90$$

x_1 : Faß Bier von Sorte S (Süffkopf), welches unter 120 liegt
x_2 : " " " " V (Vollkraft), " " 135 "
x_3 : " " " " M (Mischer), " " 90 "
x_4 : " " " " S , " über 120 "
x_5 : " " " " V , " " 135 "
x_6 : " " " " M , " " 90 " .

Bei der Maximierung wird zuerst x_1, x_2, x_3 soweit wie möglich belastet, da jede Einheit von x_i mehr Erlös bringt, als jede von x_{i+3} $i=1,2,3$ und auch jede Einheit von x_i die Restriktionen genauso belastet, wie jede von x_{i+3} $i=1,2,3$.
=> Das nichtlineare Problem kann als lineares geschrieben werden!

(a) Optimallösung: $x_1 = 120$ $x_2 = 135$ $x_3 = 90$
$x_4 = 10$ $x_5 = 0$ $x_6 = 135$

Optimalwert: 6052,5

Problem 2. Postoptimale Analyse

1. Weg: Die dritte NB „$x_1 + \ldots + x_6 \geq 490$" wird gestrichen und das neue LP wird gelöst.
2. Weg? → Dualisierung